

南京大学 2002 年攻读硕士学位研究生入学考试试题 (三小时)

考试科目名称及代码 数学分析 1-350

适 用 专 业: 数学系各专业

注意:

1. 所有答案必须写在“南京大学研究生入学考试答题纸”上, 写在试卷和其他纸上无效;
2. 本科目允许/不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

一. 求下列极限 (12')

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - \cos \frac{x}{2}}{(\sin x - \sin \frac{x}{2}) \ln(1+x)};$$

$$2. \text{ 设 } f(x) = x + \ln(a-x), x \in (-\infty, a),$$

(a) 求 $f(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上的最大值;

$$(b) \text{ 若 } x_1 = \ln a, x_2 = \ln(a-x_1), x_{n+1} = f(x_n) \quad (n=2, 3, \dots)$$

$$\text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

二. (12') 设 $f(x) = \sin x - \frac{1}{\ln x}$, 试证明 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 内有无穷多个零点.

三. (12') 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 且 $f(0)=0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 2.$$

1. 求 $f'(0)$;

$$2. \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2};$$

3. 证明 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处取得极小值.

四. (12') 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 试证明: (1) $f(0) = f'(0) = 0$; (2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.

五. 计算下列积分 (12'):

1. 求 $\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$;

2. $I = \iint_S yz dx dy + zx dy dz + xy dz dx$, 其中 S 是由圆

柱面 $x^2 + y^2 = 1$, 三个坐标平面及旋转抛物面 $z = 2 - x^2 - y^2$ 所围立体的第一卦限部分的外侧曲面.

六. (12') 设 $f(x) \in C[a, b]$, $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, $f(x)$ 不恒等于常数, 且 $f(a) = f(b)$, 试证明在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $f'(\xi) > 0$.

七. (12') 在变力 $\vec{F} = yz \vec{i} + zx \vec{j} + xy \vec{k}$ 的作用下, 质点由原点沿直线运动到椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 第一卦限的点 $M(x, y, z)$, 问 x, y, z 取何值时, 力 \vec{F} 所做的功 W 最大, 并求 W 的最大值.

八 (16') (1) 证明 $(1 - \frac{x}{n})^n \leq e^{-x}$ ($n=1, 2, 3, \dots, x \geq 0$);

(2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n x^2 dx$.