

南京大学 2002 年攻读硕士学位研究生入学考试试题(三小时)

考试科目名称及代码 数理逻辑 7-904
 适用专业: 基础数学

注意:

1. 所有答案必须写在“南京大学研究生入学考试答题纸”上, 写在试卷和其他纸上无效;

2. 本科目允许/不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

一. 运用命题演算及谓词演算中的公理系统及假言推理规则, 严格证明以下命题:

1. $\vdash \neg \beta \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha),$
2. $\alpha, \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma) \vdash \beta \rightarrow \gamma,$
3. $\vdash \forall x (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\exists x \alpha \rightarrow \exists x \beta),$
4. $\vdash (\alpha \rightarrow \forall x \beta) \rightarrow \forall x (\alpha \rightarrow \beta)$ 其中 x 在 α 中不自由出现. (30%)

二. 1. 构造一语句 α , 它仅含有一个逻辑符号 (即没有函数符号、没有“=”符号以外的谓词符号), 使得 α 在一个结构 \mathcal{U} 中成立 当且仅当

- (a) \mathcal{U} 中含有至少三个元素,
- (b) \mathcal{U} 中含有至多三个元素.
- (c) \mathcal{U} 中恰好含有三个元素.

2. 仅用一个二元谓词符号构造一个语句 α , 使得 α 没有有穷模型, 但是如果 \mathcal{U} 为无穷集, 则 α 有一个模型且其论域为 \mathcal{U} . (10%)

三. 对任意公式集 Σ 及公式 α , 求证:

- (a) $\Sigma, \neg \alpha$ 命题不协调 $\Leftrightarrow \Sigma \vdash \alpha$
- (b) Σ, α 命题不协调 $\Leftrightarrow \Sigma \vdash \neg \alpha$. (10%)

四. 公式 $\forall x(\alpha \rightarrow \alpha)$ 是逻辑真, 还是重言真? 它与公式 $\forall x(\alpha \leftrightarrow \alpha)$ 有区别吗? 为什么? (10%)

五. 叙述并证明一阶逻辑中的(强)完全性定理. (20%)

六. Σ 中的一个公式集 ψ 称为 Hintikka 集, 如果以下条件

成立:

1) 若 φ 为公式, 则 $\varphi, \neg\varphi$ 不同时属于 ψ . (即, 若 $\varphi \in \psi$, 则 $\neg\varphi \notin \psi$).

(2) 若 $\neg\neg\alpha \in \psi$, 则 $\alpha \in \psi$.

(3) 若 $\alpha \rightarrow \beta \in \psi$, 则 $\neg\alpha \in \psi$ 或 $\beta \in \psi$.

(4) 若 $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \in \psi$, 则 $\alpha \in \psi$ 且 $\neg\beta \in \psi$.

(5) 若 $\forall x\alpha \in \psi$, 则 $\alpha(x/t) \in \psi$ 对任意 Σ -term t 成立.

(6) 若 $\neg\forall x\alpha \in \psi$, 则 $\neg\alpha(x/t) \in \psi$ 对某些 Σ -term (项)

t 成立.

如果 Σ 中含等价谓词, 则

(7) 对任意 Σ -项 t , $(t=t) \in \psi$.

(8) 若 f 为 n 元函数符号且 t_1, t_2, \dots, t_{2n} 为项, 则

公式

$$t_1 = t_{n+1} \rightarrow t_2 = t_{n+2} \rightarrow \dots \rightarrow t_n = t_{2n} \rightarrow f t_1 \dots t_n = f t_{n+1} \dots t_{2n}$$

属于 ψ

(9) 若 P 为 n 元谓词符号, t_1, \dots, t_{2n} 为项, 则公式

$$t_1 = t_{n+1} \rightarrow t_2 = t_{n+2} \rightarrow \dots \rightarrow t_n = t_{2n} \rightarrow P t_1 \dots t_n \rightarrow P t_{n+1} \dots t_{2n}$$

属于 ψ .

证明: \equiv 为等价关系 (即自反、对称、传递).

南京大学 2002 年攻读硕士学位研究生入学考试试题(三小时)

考试科目名称及代码 数理逻辑 7-904

适用专业: 基础数学

注意:

1. 所有答案必须写在“南京大学研究生入学考试答题纸”上, 写在试卷和其他纸上无效;

2. 本科目允许/不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

(2) ψ 可满足 (即存在赋值 $\sigma \models \psi$).

其中 E 定义如下:

如果 \mathcal{L} 中无 “=”, 则 E 为恒等关系. 即 sEt 当且仅当 s 与 t 为同一个项.

如果 \mathcal{L} 中有谓词符号 “=”, 则 sEt 当且仅当 $s = t \in \psi$.

(20%)