南京大学 2003 年攻读硕士学位研究生入学考试试题（三小时）

考试科目名称及代码 基础综合－ 327

适 用 专 业：数学系各专业

注意：

1. 所有答案必须写在"南京大学研究生入学考试答题纸"上，写在试卷和其他纸上无效；

2. 本科目允许/不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

第二部分 概率论

(10分) 一. 已知 ξ 服从正态分布 $N(\theta,1)$，其中 θ 为某一常数. 从 ξ 的母体中随机抽出独立同分布样本 $x_1,\cdots,x_n$，设 a 为已知常数. $r_n=\#\{i:x_i\le a, i=1,\cdots,n\}$，即 r_n 为 $x_1,\cdots,x_n$ 中不大于 a 的 x_i 的个数.

（1）求 r_n 的概率分布、数学期望与方差.

（2）求 $n\to\infty$ 时 $\frac{r_n}{n}$ 的极限.

(10分) 二. 设 $\eta=y$ 条件下 ξ 的条件分布密度函数为 $g(x,y)$，η 的分布密度函数为 $h(y)$.

（1）求 (ξ,η) 的联合分布密度函数.

（2）求 ξ 与 η 的协方差 $Cov(\xi,\eta)$.

(10分) 三. 已知 ξ 服从 $[0,\theta]$ 上的均匀分布. 其中 θ 为某一常数. 从 ξ 的母体中随机抽出独立同分布样本 $x_1,\cdots,x_n$.

（1）令 $\eta_n=\max\{x_1,\cdots,x_n\}$，求 η_n 的概率分布、期望与方差.

（2）令 $\zeta_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$，求 ζ_n 的期望与方差，并求 $n\to\infty$ 时 ζ_n 的极限.

(20分) 四. 已知 (ξ,η) 的联合分布密度函数为

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{2}}{2\pi\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix}1 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}}$$

求 $\xi+\eta$ 与 $\xi-\eta$ 的分布函数.

第三部分 泛函分析

一、简答题（本题 8 分）

简述“共鸣定理（或一致有界原理）”的内容.

二、判断题（正确的画“√”，错误的画“×”）（每题 3 分，共 12 分）

1. 在一个非空集合上定义距离的方式一般说不是唯一的，但其上的任意两个或两个以上的距离（一分别）导出的收敛仍是一致的.

2. 设 $1 \le p < \infty$, q 适合 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 则 $L^p[0,1]^* = L^q[0,1]$（其中等号理解为等距同构）.

3. 有限维赋范线性空间 E 上的线性泛函必是有界线性泛函，且其上的弱收敛与强收敛是等价的.

4. E 是自反的（即 $E = E^{**}$）赋范线性空间，$\{x_n\} \subset E$，且 $\{x_n\}$ 弱 * 收敛于 $x_0 \in E$. 则 $\{x_n\}(n = 1,2,\cdots)$ 一致有界.

三、证明题（1、2 必做，3、4 选做一题）（每题 10 分，共 30 分）

1. 设 K 为实数域或复数域，H 是内积空间，$x, y \in H$. 则 $(x,y) = 0$ 的充分必要条件是 $\forall \alpha \in K$ 有

$$\|x - \alpha y\| \ge \|x\|.$$

2. 设 $\{e_n\}, \{f_n\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的标准直交系且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|e_n - f_n\|^2 < 1$. 试证 $\{e_n\}$ 和 $\{f_n\}$ 两者中一个完全蕴含另一个完全.

3. 设 $\{T_n\}(n = 1,2,\cdots)$ 是由 Banach 空间 E 到 Banach 空间 E_1 的有界线性算子列，则 $\{T_n\}$ 强收敛于某一算子 $T \in \mathcal{B}(E, E_1)$（其中 $\mathcal{B}(E, E_1)$ 是 Banach 空间 E 到 Banach 空间 E_1 的有界线性算子的全体）的充分必要条件是

（1）$\{T_n\}(n = 1,2,\cdots)$ 一致有界，

（2）存在 E 的某个稠密子集 G，使得对一切 $x \in G$, $\{T_n x\}$ 在 E_1 中收敛.

此外，当（1），（2）满足时，$\{T_n\}$ 的极限算子 T 的范数满足

$$\|T\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|.$$

4. 设 A 是定义在复 Banach 空间 E 上的有界线性算子，I 为 E 上的单位算子，$\rho(A)$ 表示 A 的正则集，$\sigma(A)$ 表示 A 的谱. $\alpha \in \rho(A)$, $C = R_\alpha(A)$. 其中 $R_\alpha(A) = (\alpha I - A)^{-1}$. 又设 μ, λ 适合 $\mu(\alpha - \lambda) = 1$. 则

（1）$\mu \in \sigma(C)$ 的充分必要条件是 $\lambda \in \sigma(A)$.

（2）若 $\mu \in \rho(C)$ 且 $\mu(\alpha - \beta) = 1$. 则 $R_\mu(C) = \mu^{-1} I + \mu^{-2} R_\beta(A)$.

南京大学 2003 年攻读硕士学位研究生入学考试试题（三小时）

考试科目名称及代码 基础综合 — 327

适 用 专 业：数学系各专业

注意：

1. 所有答案必须写在“南京大学研究生入学考试答题纸”上，写在试卷和其他纸上无效；

2. 本科目允许/不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

第四部分 常微分方程

1.（10分） 求解 $(x^3y-2y^3)dx+x^4dy=0$

2.（10分） 叙述 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$，$y(x_0)=y_0$ 的解的（局部）存在唯一性定理，并写出证明步骤（不用详细证明）

3.（10分） 解方程 $\begin{cases} y_1'=y_1+2y_2 \\ y_2'=-2y_1+y_2 \end{cases}$

4（10分）方程 $y''=a(x)y^2+b(x)y+c(x)$ 的分别满足下列初值条件的解是否存在，是否唯一？为什么？

① $y(0)=0$，② $y(0)=y'(0)=0$，

③ $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$.

这里 $a(x)$. $b(x)$. $c(x)$ 为连续函数.

5. (10分) 方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ (其中 p,q 连续)

的两个解 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 可否出现下图情况? 为什么?