

南京大学 2003 年攻读硕士学位研究生入学考试试题 (三小时)

考试科目名称及代码 高等数学丙 1-338

适用专业: 大气与海洋学

注意:

1. 所有答案必须写在“南京大学研究生入学考试答题纸”上, 写在试卷和其他纸上无效;
2. 本科目允许/不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

一、试计算 (每小题 6 分, 计 24 分)

1. 求方程 $|\sin x| = \sin x + 2$ 的实数根

2. 若 $f(x) = \frac{1}{x}$, 求 $f(x+\Delta x) - f(x)$

3. 已知 $f(x) = \lg x^2$, $\varphi(x) = 2 \lg x$, 试问 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 是否表示同一函数? 说明其理由, 并说明在哪一区间里, 它们是相同的!

4. 求 $y = \frac{2^x}{2^x + 1}$ 的反函数.

二、求极限 (每小题 5 分, 计 10 分)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$

三、求导数 (每小题 5 分, 计 10 分)

1. $y = (\ln x)^x$

2. $y = \sin^2 \left(\frac{1 - \ln x}{x} \right)$

大元

试题编号 1-338 共 2 页

四. 求函数 $y = \arctan x$ 的三阶麦克劳林展开式 (10分)

五. 求不定积分 (每小题 7 分, 计 21 分)

1. $\int \frac{x^2 dx}{x^6 + 4}$

2. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx$

3. $\int \frac{x^5 + x^2 - 8}{x^3 - x} dx$

六. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{6}$ 收敛, 并求其和 (15分)

七. 求解下列微分方程 (每小题 15 分, 计 30 分)

1. $y' \cos y - \cos x \sin^2 y = \sin y$

2. $y^{(4)} + 3y'' - 4y = e^x$

八. 若 $u = \frac{xy}{z} \ln x + x \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$, 其中 $\varphi(v, w)$ 具有连续的偏导数, 试证 $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u + \frac{xy}{z}$ (10分)

九. 求函数 $3x^2 + 2\sqrt{2}xy + 4y^2$ 在平面上, 中心在原点, 半径为 3 的圆周上的最大值 (10分)

十. 计算曲线积分 $I = \int_{AOB} (y+2x)^2 dx + (3x^2 - y^2 \sin \sqrt{y}) dy$, 其中

AOB 为抛物线 $y = x^2$ 的弧段, 起点为 $A(-1, 1)$, 终点为 $B(1, 1)$, O 为原点 (10分)