

南京大学 2003 年攻读硕士学位研究生入学考试试题 (三小时)

考试科目名称及代码 高等数学甲
 适用专业: 城资系各专业

注意:

1. 所有答案必须写在“南京大学研究生入学考试答题纸”上, 写在试卷和其他纸上无效;

2. 本科目 不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

一. 填空题 (6分×8)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} \right) =$ _____。

2. 设 $\begin{cases} x = R \cos t + Rt \sin t \\ y = R \sin t - Rt \cos t \end{cases}$, $t \in [0, +\infty)$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____。

3. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \ln(1+x)}{x \sin x} =$ _____。

4. 函数 $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ 的极大值为 _____, 极小值为 _____。

5. $\int \operatorname{ctg}^6 x dx =$ _____。

6. $\int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx =$ _____。

7. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{n} x^n$ 的收敛区间为 _____。

8. 曲面 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$ 上过点 (2, -3, -2) 的切平面方程为 _____。

二. 计算题 (15分×5)

1. 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^n + 2^n + 3^n + \dots + n^n}{n^{n+1}}$:

2. 在区间 $(-1, 1)$ 内求级数 $\frac{x}{1 \times 2} + \frac{x^2}{2 \times 3} + \frac{x^3}{3 \times 4} + \dots + \frac{x^n}{n \times (n+1)} + \dots$ 的和函数。

3. 设 $z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & , x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$,

求在 $(0, 0)$ 点处 $f(x, y)$ 的连续性, 偏导数和可微性。

4. 计算积分 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$, 其中

$$\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad x^2 + y^2 + z \leq 1 .$$

5. 求微分方程 $x^2 \frac{dy}{dx} - y^2 = xy$ 的解。

三. 证明题 (9分×3)

1. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$.

2. 求证: $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, $x \neq 0$.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可微, 且 $a > 0, b > 0$, 求证: 存在 $\xi \in (a, b)$

使得 $\frac{bf(a) - af(b)}{b-a} = f(\xi) - \xi f'(\xi)$.