# 南京大学 2007 年攻读硕士学位研究生入学考试试题(三小时)

考试科目名称及代码 高等代数 801

适 用 专 业: 数学系各专业

注意:

1. 所有答案必须写在研究生入学考试答题纸上,写在试卷和其他纸上无效;
2. 本科目~~允许~~/不允许使用~~无字典存储和编程功能的~~计算器。

一、判断题(本题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分).

判断下列陈述是否正确, 并说明理由.

1. 设 $\mathbb{Q}$ 是有理数域, 则 $P=\{\alpha+\beta i|\alpha,\beta\in\mathbb{Q}\}$ 也是数域, 其中 $i=\sqrt{-1}$.

2. 设 $f(x)$ 是数域 $P$ 上的多项式, $a\in P$. 如果 $a$ 是 $f(x)$ 的三阶导数 $f'''(x)$ 的 $k$ 重根 $(k\geqslant 1)$, 并且 $f(a)=0$. 则 $a$ 是 $f(x)$ 的 $k+3$ 重根.

3. 设 $f(x)=x^4+4x-3$, 则 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

4. 设 $f(x),g(x)$ 都是整系数多项式, $h(x)$ 是有理系数多项式并且它们满足 $f(x)=g(x)h(x)$. 则 $h(x)$ 也是整系数多项式.

5. $n$ $(n\geq 2)$ 级方阵 $A$ 可逆当且仅当 $A$ 的伴随矩阵 $A^*$ 可逆.

6. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 为两个 $n$ 维向量组. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出且 $r\leq s$, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

7. 任意一个可逆对称矩阵的逆矩阵也是可逆对称矩阵.

8. 设 $A=(a_{ij})$ 为正定矩阵, 则在 $A$ 的所有元素中, 绝对值最大者必在 $A$ 的主对角线上.

9. 设 $V_1,V_2$ 是数域 $P$ 上有限维线性空间 $V$ 的子空间, 并且维 $(V_1)$ + 维 $(V_2)$= 维 $(V)$, 则 $V=V_1\oplus V_2$.

10. 设 $\mathcal{A}$ 是 $n$ 维线性空间 $V$ 上的线性变换, $\epsilon_1,\epsilon_2,\ldots,\epsilon_n$ 是 $V$ 的一组基. 如果 $\mathcal{A}$ 是单射, 则 $\mathcal{A}(\epsilon_1),\mathcal{A}(\epsilon_2),\ldots,\mathcal{A}(\epsilon_n)$ 也是 $V$ 的一组基.

二、填空题（每空 3 分，共 30 分）

1. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} x+1 & 32 & 54 & 108 \\ 0 & x-2 & 0 & 0 \\ 0 & 72 & x+3 & 4 \\ 0 & 98 & 5 & x+4 \end{vmatrix}$，则 $f(x)$ 中 $x^3$ 的系数为 ________，常数项等于 ________.

2. 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为 ____________，符号差为 ________.

3. 实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+\lambda x_2^2+2\lambda x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$ 是正定二次型当且仅当 $\lambda$ 满足条件 ____________.

4. 设 4 级数字矩阵 $A$ 的最小多项式为 $(\lambda-5)^3$，则 $A$ 的全部不变因子为 ____________，$A$ 的特征多项式为 ____________.

5. 设 5 级数字矩阵 $A$ 的特征多项式为 $(\lambda-1)^2(\lambda-2)^3$，最小多项式为 $(\lambda-1)(\lambda-2)^2$. 则 $A$ 的全部行列式因子为 ____________，$A$ 的全部初等因子为 ____________.

6. 设三维欧几里得空间 $V$ 中一组基 $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$ 的度量矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且 $\alpha=2\epsilon_1-\epsilon_2+\epsilon_3$，则 $\alpha$ 的长度 $|\alpha|=$ ____________.

三、（15 分）设向量组 $\alpha_1=(-1,2,0,4)$，$\alpha_2=(5,0,3,1)$，$\alpha_3=(3,-1,4,-2)$，$\alpha_4=(-2,4,-5,9)$，$\alpha_5=(1,3,-1,7)$.

1. 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩；

2. 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大线性无关组；

3. 将向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 中其余向量表为极大线性无关组的线性组合.

# 南京大学 2007 年攻读硕士学位研究生入学考试试题（三小时）

考试科目名称及代码 高等代数 801

适 用 专 业： 数学系各专业

注意：

1.所有答案必须写在研究生入学考试答题纸上，写在试卷和其他纸上无效；

2.本科目~~允许/~~不允许使用~~无字典存储和编程功能的~~计算器。

四、(15 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，把 $A$ 分解为一个正交矩阵和一个上三角矩阵的乘积.

五、( 10 分 ) 设 $n$ 为正整数， $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ 都是多项式，并且

$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x + 1 \mid f_1(x^{n+1}) + x f_2(x^{n+1}) + \cdots + x^{n-1} f_n(x^{n+1}).$$

证明： $(x-1)^n \mid f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$.

六、( 10 分 ) 设 $A$ 为 $n$ 级可逆矩阵， $U, V$ 为 $n\times m$ 矩阵， $E_m$ 是 $m$ 级单位矩阵. 若 秩 $(V'A^{-1}U + E_m) < m$，则 秩 $(A + UV') < n$ ，其中 $V'$ 表示 $V$ 的转置.

七、( 15 分 ) 设 $A$ 是 $n$ 级正定矩阵， $B$ 是 $n$ 级实矩阵并且 0 不是 $B$ 的特征值，证明： $|A + B'B| > |A|$.

八、( 15 分 ) 设 $A$ 是三级正交矩阵并且 $|A| = 1$. 求证：

(1) 1 是 $A$ 的一个特征值.

(2) $A$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 可表示为 $f(\lambda) = \lambda^3 - a\lambda^2 + a\lambda - 1$，其中 $a$ 是某个实数.

(3) 若 $A$ 的特征值全为实数并且 $|A + E| \neq 0$，则 $A$ 的转置 $A' = A^2 - 3A + 3E$，其中 $E$ 是 3 级单位矩阵.