

南京大学 2007 年攻读硕士学位研究生入学考试试题 (三小时)

考试科目名称及代码 高等数学甲 637
 适用专业: 地理与海洋科学各专业

注意:

1. 所有答案必须写在研究生入学考试答题纸上, 写在试卷和其他纸上无效;
2. 本科目 ~~允许~~ 不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

一、填空题 (本大题共10小题, 每小题6分, 共60分)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n})}{n^{n-1}} = \underline{\hspace{2cm}}.$
2. $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})^2}{\ln(1 + \frac{1}{x^2})} = \underline{\hspace{2cm}}.$
3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \underline{\hspace{2cm}}.$
4. 设 $\frac{d}{dx}[f(\frac{1}{x^2})] = \frac{1}{x}$, 则 $f'(16) = \underline{\hspace{2cm}}.$
5. 设 $u = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 则 $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}.$
6. 设 A, B 为任意 n 阶方阵, 且 $BA = A+B$, 则 $AB = \underline{\hspace{2cm}}.$
7. 设 $f(x, y)$ 连续, 且 $f(x, y) = x + \iint_D y f(u, v) du dv$, 其中 D 由 $y = \frac{1}{x}, x = 1, y = 2$ 所围成的区域, 则 $f(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}.$
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + e + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}}}{n} = \underline{\hspace{2cm}}.$
9. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$
10. 曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 在点 $P(1, -2, 2)$ 的法线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

二、计算题 (本大题共7小题, 每小题10分, 共70分)

1. 设 $f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x}$, 求 $I = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) dx$.
2. 计算 $\int_0^{-\infty} dx \int_x^{2x} e^{-y^2} dy$.
3. 求微分方程 $(x^2 - 1)dy + (2xy - \cos x)dx = 0$ 满足初始条件 $y(0) = 1$ 的解.
4. 计算三重积分 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$ 所围成的区域.
5. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1}$ 的和函数.
6. 设 \vec{n} 是曲面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 处的外法线向量, 计算函数 $u = \frac{\sqrt{6x^2 + 8y^2}}{z}$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 处沿方向 \vec{n} 的方向导数.
7. 已知 $f'(\ln x) = \frac{x \ln x}{(1 + \ln x)^2}$, 求 $f(x)$.

三、证明题 (本大题共2小题, 每小题10分, 共20分)

- (1) 用 “ $\varepsilon - \delta$ ” 定义证明 $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 = 16$.
- (2) 构造适当的辅助函数证明: $e^{\pi} > \pi^e$.