/ 7.2

2003年上海理工大学硕士研究生入学考试试题

考试科目：高等数学基础　准考证号：________　得分：________

一、单项选择题(在每小题的四个备选答案中,只有一个是正确的,将其代号写在括号里.

每小题5分,共25分)

1. 指出下列函数中当 $x\to0^+$ 时的无穷小量是 .... (　).

A) $x\sin\frac{1}{x}$，　B) $e^{\frac{1}{x}}$，　C) $\ln x$，　D) $\frac{\sin x}{x}$；

2. 方程 $x^3-3x+1=0$ 在区间(0, 1)内的实根个数为 .... (　).

A) 1个，　B) 2个，　C) 3个，　D) 无实根;

3. 讨论函数 $y=3x^4-4x^3+5$ 的极值点正确的是 .... (　).

A) $x_1=1,x_2=0$ 都是极值点，　B) $x_1=1$ 是极值点,$x_2=0$ 不是极值点，

C) $x_1=1,x_2=0$ 都不是极值点，　D) $x_1=1$ 不是极值点,$x_2=0$ 是极值点;

4. 下列函数中是 $f(x)=xe^{2x}$ 的原函数的是 .... (　).

A) $(1+2x)e^{2x}$，　B) $(1+2x)e^{2x}dx$，　C) $\frac{1}{4}e^{2x}(2x-1)$，　D) xe^{2x}；

5. 设函数 f(x)连续，$F(x)=\int_0^{x^2} f(x^2-t)dt$，则 $F'(x)$ 为 .... (　).

A) $2x\int_0^{x^2} f(x^2-t)dt$，　B) $f(x^2)-f(0)$，　C) $f(0)-f(x^2)$，　D) $2xf(x^2)$.

二、填空题(每小题6分,共30分)

1. 极限 $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}=$________;

2. 设 $y=e^{-x}\cos(3x)$，则微分 $dy=$________;

3. 设 $f(x)=x\sin x$，则 f(x)的20阶导数 $f^{(20)}(x)=$________;

4.定积分 $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4}=$______________;

5.极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}=$________.

三、（本题 8 分）设 $x_1>0$，且 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$，(n=1，2，⋯；a>0)．证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

四、（本题 10 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\le 1\\ x^2 & x>1\end{cases}$，计算定积分 $\int_1^3 f(x-1)dx$.

五、（本题 12 分）讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^\alpha \sin\frac{1}{x} & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 的连续性与可导性.

六、（本题 12 分）确定函数 $f(x)=\int_1^x\left(2-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt$ 的单调递减区间.

七、（本题 13 分）设 f(x)的一个原函数为 $\frac{\ln x}{x}$，求 $\int xf'(x)dx$.

八、（本题 14 分）证明不等式：$\frac{1}{2}\le\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}\le\frac{\pi}{6}$，其中 n>2 为自然数.

九、（本题 13 分）在椭圆 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$ 中嵌入边与坐标轴平行的矩形，求其中的最大面积，以及达到最大面积时的长与宽.

十、（本题 13 分）设 f(x)在闭区间[0，c]上连续，其导数 f '(x)在开区间(0，c)内存在且单调递减，f(0)=0，证明不等式：f(a+b)≤f(a)+f(b)，其中常数 a、b 满足条件 0≤a≤b≤a+b≤c.