华东理工大学一九九八年研究生(硕士、~~博士~~)入学考试试题

（试题附在考卷内交回）

考试科目号码及名称：262 - 量子力学　　　　

注意！　下列第 1-7 题为所有考生必做题，第 8 题应届生必做，第 9 题在职生必做。每位考生共做八题。

1. 试简述一力学量为守恒量的条件及守恒量有哪些性质.

(10 分)

2. 证明下列算符等式：

$$[A, B+C] = [A, B] + [A, C]$$
$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$$
$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$
$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

(12 分)

3. 某一角动量算符满足

$$\vec{J} \times \vec{J} = i\hbar\vec{J}$$

如果定义：$J_+ = J_x + iJ_y$, $J_- = J_x - iJ_y$

试证明：(1) $[J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm$ ；(2) $[J^2, J_\pm] = 0$

(12 分)

4. 已知一厄密算符在正交归一基矢 $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ 张成的三维空间中取如下矩阵形式

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求其本征值和本征矢.

(12 分)

5. 已知 $\frac{d}{dx}\psi_n = \alpha\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1} - \sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}\right]$

其中 ψ_n 为一维谐振子的能量本征态，$\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$，

由此推算 $\frac{d^2}{dx^2}\psi_n = ?$，并证明在 ψ_n 态下

$$\overline{P} = 0, \overline{T} = E_n/2$$

（13 分）

6. 有一电子束缚在面积为无限大，介电系数为 ε 且不可透入的介质平面附近运动。根据电象法知道势能 $V(z) = -\frac{1}{4}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)\frac{e^2}{z}$，（z 是垂直于介质平面向上的坐标，原点在平面上）求电子定态运动的能级和波函数。

（13 分）

7. 两个质量都是 M，自旋都是 1/2 的全同粒子，它们间的相互作用势为

$$V_{12} = V(r_{12}) + K\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

$$V(r_{12}) = \begin{cases} 0, r_{12} < a \\ \infty, r_{12} > a \end{cases}$$

$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$; $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ 为粒子的坐标，$\vec{S}_1, \vec{S}_2$ 为粒子的自旋，K，α 都是常数，求出此双粒子系统的 S 态解。

（14 分）

8.（应届生必答题） 对一个一维谐振子势 $V = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ 中质量为 m 的粒子，(1) 利用谐振子能量本征态 $\phi_n(x)$，写出时间相关 **Sch.** 方程的最一般解 $\psi(x,t)$；(2) 利用上述结果证明 x 的期望值 $\langle x\rangle$ 作为时间的函数，可写成 $A\cos\omega t + B\sin\omega t$ 形式，其中 A、B 为常数。

（14 分）

9.(在职生必答题)某个状态$\langle\psi|$ 是L^2和L_z的本征态

$$\begin{cases} L^2|\psi\rangle = l(l+1)\hbar^2|\psi\rangle \\ L_z|\psi\rangle = m\hbar|\psi\rangle \end{cases}$$

在这个态下计算$\langle L_X\rangle$和$\langle L_X^2\rangle$.

(14 分)