华东理工大学二〇〇一年研究生（硕士、博士）入学考试试题

（试题附在考卷内交回）

考试科目代码及名称：464　高等代数　

一、（32 分）填空：

1、设 a,b 为 n 维非零列向量，则矩阵 ab' 的非零特征值为 ________(4 分)。

2、设某 n 阶方阵的特征多项式为 $\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+\cdots+b_{n-1}\lambda+b_n$，则 A 可逆的充分必要条件为 ________（2 分），当 A 可逆时，其逆 $A^{-1}=$ ________（2 分）。

3、对于线性方程组

$$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=2 \\ x_1+bx_2+x_3=1 \\ x_1+2bx_2+2x_3=4 \end{cases},$$

当 ________(2 分)时无解；当 ________(2 分)时有唯一解；当 ________（2 分）时有无穷多组解。

4、$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}=$ ________（6 分）。

5、复矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & -1 \end{pmatrix}$ 可对角化的充分必要条件为 ____（4 分）。

6、二次型 $x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$ 的正惯性指数、负惯性指数分别为______（2 分）、______（2 分）。

7、令 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\2\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\\-2\end{pmatrix}$，设 α_1,α_2 生成的子空间为 W_1；α_3,α_4 生成的子空间为 W_2，则 $\dim(W_1+W_2)=$______（2 分）；$\dim(W_1\cap W_2)=$______（2 分）。

二、（6 分）证明，若整系数线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=c_i\qquad i=1,2,\cdots,n$$

对于任意整数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 都有整数解，则其系数行列式等于 ±1。

三、（10 分）二次型

$$q=k(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$$

通过正交线性变换 $x=Qy$ 化为标准形：

$$3y_1^2+3y_2^2+3y_3^2-y_4^2,$$

（1）　求 k 的值；

（2）　若要求 q 为正定二次型，则 k 的取值范围为多少？

四、（8 分）求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-4&1&4\\-12&4&8\\-6&1&6\end{pmatrix}$$

的不变因子、初等因子及 Jordan 标准形。

华东理工大学二〇〇一年研究生（硕士、博士）入学考试试题

（试题附在考卷内交回）

五、（12 分）给定实对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

求正交矩阵Q，使$Q'AQ$为对角矩阵。

六、（6 分）设A为n维线性空间V的线性变换，满足$A^2=A$。证明：

$V=AV\oplus A^{-1}(0)$。

七、（8 分）设A为$n\times s$实矩阵，b为n维实列向量，证明：

（1）$A'Ax=0$与$Ax=0$为同解方程组；

（2）$rank(A'A)=rank(A)$；

（3）线性方程组$A'Ax=A'b$必有解。

八、（8 分）设n阶实方阵$A=(a_{ij})$满足：

$$0\le a_{ij}\le 1,(i,j=1,2,\cdots,n);\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=1,(i=1,2,\cdots n)$$

证明：（1）A的特征值λ的模 $|\lambda|\le 1$；

（2）A必有特征值 1。

九、（10 分）（1）证明，若方阵$T=(t_{ij})$主对角线上的元t_{ii}均不为零，则存在向量$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$，使TY的每个分量都不为零。

（2）若线性方程组$Ax=0$的一个解x^0的各个分量均不为零，则称x^0

为 $Ax=0$ 的一个强非零解。试利用本题（1）的结果证明，$Ax=0$ 有强非零解的充分必要条件是 A 的任一列向量均可表为其余列向量的线性组合。