# 华东理工大学二〇〇二年硕士研究生入学考试试题

考试科目代码及名称:464 高等代数 

一.填空题：（20 分）

1.（6 分）2n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \cdots & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b & 0 & \cdots & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} =$ ________.

2. （6 分）当 $\lambda=$ ______时，方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda \end{cases}$ 有解，其通解为：________________.

3. （4 分）当 $t$ 满足 ________ 条件时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 是正定的。

4.（4 分）设 A 为 3 阶幂等矩阵，则 A 的可能的 Jordan 标准形为：

________________.

二.（8 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 是一组 n 维向量，试证：$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是任一 n 维向量都可由它们线性表出。

三.（8 分）设 $A,B$ 都是可逆矩阵，求证：$\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} A & D \\ O & B \end{bmatrix}$ 也都是可逆矩阵，并且求 $\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}^{-1}$ 和 $\begin{bmatrix} A & D \\ O & B \end{bmatrix}^{-1}$。（其中 $O$ 为零矩阵）

四.（10 分）1.如果 A 是一个实对称矩阵，且 $A^2=O$,证明：A=O.

2.举例说明在一般情况下，由 $A^2=O$ 推不出 A=O.

五.（10 分）设 A,B 都是实对称矩阵，试证：存在正交矩阵 T,使 $T^{-1}AT=B$ 的充分必要条件是 A 与 B 的特征多项式相等。

六.（10 分）设 $W_1,W_2$ 分别是齐次方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 及 $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ \cdots\cdots \\ x_{n-1} - x_n = 0 \end{cases}$ 的解空间，求 $W_1,W_2$，并证 $P^n = W_1 \dotplus W_2$ .（$\dotplus$ 为直和）

# 华东理工大学二〇〇二年硕士研究生入学考试试题



考试科目代码及名称：464 高等代数

七.（12 分）设 $A$ 是线性空间 $V$ 的一个线性变换，$\lambda_0$ 是 $A$ 的特征多项式的一个 $k$ 重根，设 $W=\{\alpha\in V|A\alpha=\lambda_0\alpha\}$

1.证明：$W$ 是 $V$ 的一个子空间。

2.证明：$\dim W\le k$

八.（10 分）设 A,B 都是线性空间 $V$ 的线性变换，并且 AB=BA,求证：

1.A 的特征子空间一定是 B 的不变子空间。

2.如果 $V$ 是复数域上的线性空间，则 A,B 一定有公共特征向量。

九.（12 分）用 $V$ 表示由全部 n 阶实方阵所成的实线性空间，定义 $V$ 上的二元函数 $(A,B)$ 为：　$(A,B)=tr(AB^T)$

1. 证明 $(A,B)$ 满足内积的条件，因此 $V$ 在此定义下成一欧氏空间。
2. 求这个欧氏空间的一组标准正交基。