华东理工大学二○○五年硕士研究生入学考试试题

（答案必须写在答题纸上，写在试题上无效）

考试科目代码及名称：　高等代数（463）

一、（10 分）计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3 & 2\\ 3 & 0 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 4 & 3\\ 2 & 2 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

的值。

二、（15 分）设 $A_1,A_2,\cdots,A_p$ 为 p 个 n 阶方阵，且 $A_1A_2\cdots A_p=O$，证明：

$$\sum_{j=1}^{p} rank(A_j)\le n(p-1)。$$

三、（15 分）将二次型 $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 化为标准型，并给出所用的线性替换。

四、（15 分）设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶实对称矩阵，令

$$A_i=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1i}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{ii}\end{pmatrix}$$

$P_i=\det A_i\ (i=1,\cdots,n)$ 为 A 的第 i 个顺序主子式。设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 均不为零。

（1）　证明 A 合同于 $\begin{pmatrix}A_{n-1} & O\\ O & \dfrac{P_n}{P_{n-1}}\end{pmatrix}$；

（2）　用数学归纳法证明 A 合同于

$$\begin{pmatrix}P_1 & & & \\ & \dfrac{P_2}{P_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \dfrac{P_n}{P_{n-1}}\end{pmatrix};$$

（3）证明 A 为正定当且仅当 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 均为正数。

华东理工大学二〇〇五年硕士研究生入学考试试题

（答案必须写在答题纸上，写在试题上无效）

考试科目代码及名称：高等代数（463）　　

五、（15 分）设 ω 为欧氏空间 R^n 的一个单位列向量，a 为一个实数，定义 R^n 的一个变换为

$$Tx = x - a(x,\omega)\omega,$$

这里 (x,ω) 是 x 与 ω 的通常内积，

（1）证明 T 为 R^n 的线性变换；

（2）当 a 取何值时，T 为正交变换？

（3）当 T 为正交变换时，T 在 R^n 的任意一组基下的矩阵的行列式的值等于多少。

六、（15 分）对 $i=1,2,\cdots,n$；$j=1,2,\cdots,n$，令 $b_{ij}=(-1)^{i+j}a_{ij}$，证明：

$$\det(a_{ij})=\det(b_{ij})。$$

七、（18 分）求方阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix}$ 的不变因子、初等因子以及 Jordan 标准型。

八、（15 分）设 A 和 B 都是 n 阶方阵，且 $rank(A)+rank(B)=n$，试求矩阵方程 $AXB=O$ 的通解。

九、（17 分）设 A 为 n 阶实斜对称方阵，即 A 为实方阵，且满足 $A^T=-A$，证明：

（1）A 的非零特征值都为纯虚数；

（2）对于任意正实数 a，$\det(aI+A)>0$。

十、（15 分）设 A、B 为两个 n 阶实方阵，如果存在可逆的 n 阶实方阵 P，使 $B=P^{-1}AP$，则称 A 与 B 是实相似的。证明：

（1）实方阵的实相似为一个等价关系（即满足反身性、对称性、传递性）；

（2）n 阶实方阵 A 与 B 实相似当且仅当它们相似。