上海大学 2001 年数学分析考研试题

一、计算下列极限、导数和积分

<1>计算极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}(x)^{\frac{1}{x}}$

<2>计算 $\varphi(x)=\int_0^{x^2} f(t)dt$ 的导函数 $\varphi^{'}(x)$，其中 $f(t)=\begin{cases} t & ,(t\le 1) \\ t^2+1 & ,(t>1) \end{cases}$

<3>已知 $[\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}tgx)]^{'}=\frac{1}{1+\sin^2 x}$，求积分 $I=\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\sin^2 x}dx$

<4>计算 $f(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2}(xyz)^2 dxdydz\ \ (t>0)$ 的导数 $f^{'}(t)$（只需写出 $f^{'}(t)$ 的积分表达式）

二、设 $f(x)$ 在[a,b]上连续，在（a,b）上可导。若 $f(a)f(b)>0$ 且 $f(\frac{a+b}{2})=0$，试证明必存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f^{'}(\xi)=0$

三、令 $F(x,y)=y+xe^y-1$

证明 $F(x,y)<0$, $x\in(-\frac{1}{12},\frac{1}{12})$

$F(x,y)>0$, $x\in[-\frac{1}{12},\frac{1}{12}]$

证明对任意 $x\in(-\frac{1}{12},\frac{1}{12})$，方程 $F(x,y)=0$ 在 $y\in(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ 中存在唯一解 $y(x)$

计算 $y^{'}(0)$ 和 $y^{''}(0)$

四、一致连续和一致收敛性

函数 $f(x)=x^3$ 在 [0,1] 上是一致连续的，对 $\varepsilon=10^{-2}$ 试确定 $\delta>0$ 使得当 $0\le x_1<x_2\le 1$ 且 $x_2-x_1<\delta$ 时有 $|x_1^3-x_2^3|<10^{-2}$

设 $f_n(x)=\dfrac{n^2x^2+1}{2+n^3x}$ ，$x\in[0,1], n=1,2,3,\cdots$ 证明 $f_n(x)$ 在[0,1]上是内闭一致收敛的。

五、曲线积分、格林公式和原函数

计算第二型曲线积分 $\mathrm{I}=\dfrac{1}{2\pi}\oint\limits_{(L)}\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ ，其中 L 是逐段光滑的简单闭曲线，原点属于 L 围成的内部区域，(L) 的定向是逆时针方向。

设 $p(x,y), q(x,y)$ 除原点外是连续的，且有连续的偏导数，若

a> $\dfrac{\partial p}{\partial y}=\dfrac{\partial q}{\partial x}, (x,y)\neq(0,0)$

b> $\oint\limits_{(L)} pdx+qdy=c\neq 0$ 其中 (L) 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}, 0\le t\le 2\pi$

证明：存在连续可微 $F(x,y), (x,y)\neq(0,0)$ ，使得 $\dfrac{\partial F}{\partial y}=q(x,y)-\dfrac{c}{2\pi}\dfrac{x}{x^2+y^2}$ ，$\dfrac{\partial F}{\partial y}=q(x,y)-\dfrac{c}{2\pi}\dfrac{x}{x^2+y^2}$