上海大学 2002 年线性代数考研试题

1 行列式计算（14%）：

若 $A=2B=\begin{pmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{pmatrix}$，求 $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}$。

2 设 A 是 n 阶可逆方阵，$B=\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$。（1）计算 B^k（k 是整数）。

（2）假设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$C$ 为 6 阶方阵，而且 $BC=2C+E$，求 C。（14%）

3 设 $A=\begin{pmatrix} -\rho & -\rho & \cdots & -\rho & (n-1)\rho \\ -\rho & -\rho & \cdots & (n-1) & -\rho \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\rho & (n-1)\rho & \cdots & -\rho & -\rho \\ (n-1)\rho & -\rho & \cdots & -\rho & -\rho \end{pmatrix}$ 为 n 阶矩阵 $(\rho\neq 0)$，求 $AX=0$ 的基础解系。

4 构造一个 3 阶实对称方阵 A，使其特征值为 1，1，-1。并且对应的特征值有特征向量：$(1,1,1)^t$，$(2,2,1)^t$。

5 设向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的秩为 $r(r<n)$，则 A 中任意 r 个向量线性无关的充分且必要条件为对任意向量 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_{r+1}}$，若 $k_1\alpha_{i_1}+k_2\alpha_{i_2}+\cdots+k_{i_{r+1}}=0$，则 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 或全为 0 或全不为 0。

6 设 A 为 n 阶正定矩阵，$B_{n\times m}$ 为秩是 m 的实矩阵，求证 $B'AB+tE$（$t>0$，E 为单位矩阵）为正定矩阵。（10%）

7 设 A 为欧氏空间 V 上的线性变换，且 $A^2=E$。

（1）求证 A 是 V 上的正交变换的充分且非必要条件为 A 是 V 上的对称变换。

（2）设 $V_1=\{\alpha\mid\alpha\in V, A\alpha=\alpha\}$，求证 $V=V_1+V_2$ 且是直和。（16%）

8 设 A 是 n 阶实正交矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 n 维列向量，且线性无关，若 $(A+E)\alpha_1,\cdots,(A+E)\alpha_n$ 线性无关，则 $|A|=1$。（10%）