

华东师范大学

一九九八年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目：数学分析

专业：

共 2 页

一. 简答题 (20分):

(1) 用定义验证: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+2}{2n^2+n+1} = \frac{3}{2}$;

(2) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0 \\ \ln(1+x^2), & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$;

(3) 计算 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

二. (12分) 设 $f(x)$ 有连续的 n -阶导函数, 且

$f(\pi) = 2, \int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \sin x dx = 5,$

求 $f(0) = ?$

三. (20分)

(1) 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为发散的一般项级数, 试证明 $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n}) a_n$ 也是发散级数.(2) 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上处处收敛, 而不一致收敛.

四. (12分) 设 $D: x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2$,

$$F(t) = \iiint_D f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz,$$

其中 f 为连续函数, $f(1) = 1$.

证明 $F'(1) = 4\pi$.

五. (12分) 设 D 为由两抛物线 $y = x^2 - 1$ 与 $y = -x^2 + 1$ 所围成的闭域. 试在 D 内求一椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 使其面积为最大.

六. (12分) 设 $u(x, y)$ 有连续二阶偏导数,
 $F(s, t)$ 有连续一阶偏导数, 且满足:

$$F(u'_x, u'_y) = 0, \quad (F'_s)^2 + (F'_t)^2 \neq 0.$$

证明: $u''_{xx} \cdot u''_{yy} - (u''_{xy})^2 = 0$.

七. (12分) 设 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的周期函数, 其周期可小于任意小的正数. 证明:
 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 $f(x) \equiv \text{常数}$.