华 东 师 范 大 学

一九九九年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目：高等数学（A）

招生专业：

一、计算题（30分）

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$；

2. 设 $f'(0)$ 存在，求 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(ah)-f(bh)}{h}$；

3. 求积分
$$\iint\limits_{\Sigma} z\,dS$$
其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱体 $x^2+y^2=2x$ 内的部分；

4. 设 $z=\frac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$，$f$、$\varphi$ 二阶连续可微，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

5. 求 $\int_0^1 xf''(x)dx$。

二、（12分）将函数 $f(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$ 展开成 x 的幂级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$ 的和。

三、（12分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)<1$，证明方程
$$2x-\int_0^x f(t)dt=1$$
在 $[0,1]$ 上有且仅有一个实根。

四、（12分）试在曲线 $y=e^{-x}\ (x\geq 0)$ 上找出一点，使得过该点的切线与 $y=e^{-x}$，y 轴，$x=x_A$ 所围成的平面图形的面积 S 为最小。（x_A 为切线与 x 轴的交点 A 的横坐标）。

（12分）

五. 设有力场 $\vec{F}=[y(e^{-x}-f'(x))+f(x)]\vec{i}+f(x)\vec{j}$，其中 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶连续导数，且 $f(0)=0$。又设 L 是从点 $A(-1,1)$ 到点 $B(1,0)$ 的一条光滑的有向曲线。试确定 $f(x)$，使力场 $\vec{F}$ 沿 L 所做的功与路径的选择无关，且其值等于 $\frac{e}{3}$。

六.（12分）设 $f(x)$ 为以 2π 为周期的周期函数，其 Fourier 系数为 a_n, b_n。又 $f(x)$ 连续，求函数

$$G(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\,dt$$

的 Fourier 系数 A_n, B_n，并由此证明

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

七.（10分）设 $f(x)$、$g(x)$ 两函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且

$$f(0)=1,\quad g(0)=0,\quad f'(x)=-g(x),\quad g'(x)=f(x)$$

证明 $f^2(x)+g^2(x)\equiv 1$，且 $f(x)=\cos x$，$g(x)=\sin x$。