华东师范大学

二〇〇〇 年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目：高等数学(A)

招生专业：

一、选择题（每一小题中，只有一个选项是正确的；共计25分）

1. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$，且 $f(x)=o(g(x))\ (x\to x_0)$，$g(x)\neq 0$，则以下不一定正确的是________（　）

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}(1+f(x))^{\frac{g(x)}{f(x)}}=1$；　(B) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{e^{f(x)}-1}{g(x)}=0$；

(C) $f^2(x)+g(x)\sim g(x)\ (x\to x_0)$；　(D) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\arctan f(x)}{\sin g^2(x)}=0$。

2. 设
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^4+y^2\neq 0\\ 0, & x^4+y^2=0\end{cases}$$
则该函数在点(0,0)处，________（　）

(A) 连续；　(B) 偏导数 f'_x、f'_y 存在，但不连续；

(C) 偏导数 f'_x、f'_y 存在且连续；　(D) 可微。

3. 设 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，Ω 为由 Σ 与 $z=0$ 所围成的区域，则 $\iint\limits_{\Sigma} z\,dx\,dy=$________（　）

(A) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}\cdot r\,dr$；　(B) $-\iiint\limits_{\Omega}dx\,dy\,dz$；

(C) $-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}\cdot r\,dr$；　(D) $\iiint\limits_{\Omega}z\,dx\,dy\,dz$。

4. 设 $f(x)=x^2$，$x\in[0,\pi]$；$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$，其中 $b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$，则 $S(-\frac{1}{2})=$________（　）

(A) $-\frac{1}{4}$；　(B) $\frac{1}{8}$；

(C) $\frac{1}{4}$；　(D) $-\frac{1}{8}$。

5. 设直线L_1、L_2分别为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+3}{1};\qquad \begin{cases} x=3+2t \\ y=2+t \\ z=5 \end{cases}$$

则L_1与L_2的夹角为——————————————（　）

(A) $\frac{\pi}{6}$;　　(B) $\frac{\pi}{4}$;

(C) $\frac{\pi}{2}$;　　(D) $\frac{\pi}{3}$.

二、计算题（共计25分）

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(2^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right)$;

2. 求 $\int\frac{dx}{\cos^2 x+3\sin^2 x}$;

3. 设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $x+y-z=e^z$ 所确定的隐函数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

4. 求 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,dv$，其中$\Omega$为 $x^2+y^2=16$，$y+z=4$，$z=0$ 所围成的区域.

5. 求幂级数 $x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{x^6}{5}-\frac{x^8}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n-1}+\cdots$ 的和函数.

三、(12分) 设连续函数$f(x)$在$[a,b]$上单调增加，则

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt$$

在(a,b)上单调增加.

四、(12分) 设$f(x)$为定义在$(-\infty,+\infty)$上的，以2π为周期的函数，并具有连续的二阶导数，记

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,\quad B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\sin nx\,dx$$

若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n$绝对收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{|b_n|}$ 收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|b_n|}<\frac{1}{2}\left(2+\sum_{n=1}^{\infty}|B_n|\right).$$

五.(13分) 求旋转椭球面 $2x^2+y^2+z^2=1$ 上距平面 $2x+y-z=6$ 的最短距离.

六.(13分) 设 $y(x)$ $(x\geq 0)$ 二阶可导, $y'(x)>0$, $y(0)=1$. 过曲线 $y=y(x)$ 上任意一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线. 记上述两条直线与 x 轴围成的图形面积为 S_1, 又记在 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积为 S_2, 且 $2S_1-S_2=1$. 试写出曲线 $y=y(x)$ 的方程.