

## 华东师范大学

二〇〇〇 年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目: 高等代数.

招生专业:

15分 一. 已知下列非齐次线性方程组 (I), (II)

$$(I) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}, \quad (II) \begin{cases} x_1 + mx_2 - x_3 - x_4 = -5 \\ nx_2 - x_3 - 2x_4 = -11 \\ x_3 - 2x_4 = -t + 1 \end{cases}$$

1. 求方程组 (I), 用基向量组的基础解系表示通解.
2. 当方程组 (II) 中的参数  $m, n, t$  为何值时方程组 (I) 与 (II) 同解.

15分 二. 设  $n$  阶方阵  $A, B$  满足条件  $A+B=AB$ .

1. 证明:  $A-E$  为可逆矩阵,  $E$  为  $n$  阶单位矩阵.
2. 证明:  $AB=BA$ .
3. 已知  $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  求  $A$ .

15分 三. 设向量  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ ;  $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$  都是非零向量, 且满足条件  $\alpha^T \beta = 0$ . 令  $n$  阶方阵  $A = \alpha \beta^T$ .

1. 求  $A^2$  ;
2. 求矩阵  $A$  的特征值和特征向量.
3. 说明  $A$  是否与对角矩阵相似.



15分 四: 求下列二次型经线性替换把

$$2x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 - 4x_1x_3 + 4x_3^2$$

$$+ 5\left(\frac{3}{2}x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_2x_3 + 2x_3^2\right) \text{ 同时分别化}$$

成标准形。

10分 五: 试证: 设  $f(x)$  是整系数多项式, 且  $f(1)=f(2)=f(3)=p$   
( $p$  是素数) 则不存在整数  $m$ , 使  $f(m)=2p$  成立。

15分 六: 设  $A$  是  $n \times n$  实对称矩阵,  $B$  是  $n \times n$  正定矩阵。

试证:  $|A+B| \geq |B|$ , 且等号成立当且仅当  $A=0$ 。

15分 七: 设  $A$  是线性空间  $V$  的线性变换

试证:  $\text{秩 } A^2 = \text{秩 } A \iff A$  的值域与核的交  
为零空间。

即  $AV \cap A^{-1}(0) = \{0\}$ 。