

华东师范大学

共 2 页

2003 年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目: 高等数学 (B)

招生专业:

注: (1) 第一大题只需写出最后的结果, 所有的答案都写在答题纸上 (包括第一大题);
 (2) 正切函数、余切函数和自然对数函数分别为 $\tan x$ 、 $\cot x$ 和 $\ln x$.

一、填空题 (每小题 6 分, 共 90 分)

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x^6}\right)^{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 设 $g(x) = \ln(1+x)$, $x > 0$, $f(x) = g(g(x))$, 则 $\frac{df}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1 + 3^n + 5^n + \cdots + 2003^n} = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 设 $g(x)$ 有连续的导函数, $g(0) = 0$, $g'(0) = a$, 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - b \tan x}{x} & x \neq 0 \\ c & x = 0 \end{cases}$ 是连续函数, 则 $c = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $1 - \cos \frac{1}{n}$, $\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^4$, $a^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1$ ($a > 0$) 都是无穷小量, 若按无穷小量的阶从低到高排列, 则应有 $\underline{\hspace{2cm}}.$

6. 设 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 + t^2 \end{cases}$, 则 $\frac{d^2x}{dy^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

7. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n$ 在 $x=1$ 处收敛, 则当 $x=-2$ 时, 本级数是 $\underline{\hspace{2cm}}$ (在①绝对收敛、②条件收敛、③发散、④敛散性与 a_n 有关的四个选项中选一).

8. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)x^n$ 的收敛域为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 和函数为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

9. 设 $f(x)$ 是连续函数, $\phi(x)$ 是连续可导函数, $g(x) = \int_0^{\phi(x)} (\phi(x) - t)f(t)dt$, 则 $\frac{dg(x)}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}.$

10. 交换积分次序 $\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy =$ _____ .

11. 设 $z = xyf\left(\frac{y}{x}\right)$, $f(u)$ 是可微函数, 则 $xz'_x + yz'_y =$ _____ . (要求最简结果)

12. 设曲线 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ 上有一个拐点 $(1, -1)$, 在点 $(0, c)$ 处的切线与直线 $x - y = 1$ 平行, 则 a, b, c 的值分别为 _____ .

13. 曲线 $y = (x+2)e^{-\frac{1}{x}}$ 的渐近线方程是 _____ .

14. 微分方程 $y'' + y = -2x$ 的通解为 _____ .

15. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx =$ _____ .

二、(本题 10 分) 设 D 是以点 $O(0, 0)$, $A(1, 2)$ 和 $B(2, 1)$ 为顶点的三角形区域, 求 $\iint_D x dx dy$.

三、(本题 10 分) 现有一种新的软件知识需要推广, 假设这种知识是通过已掌握的人进行推广的, 并且设总人数为 M . 在 $t = 0$ 时, 已掌握该知识的人数为 $p_0 = 1$, 以后 t 时刻掌握的人数记为 $p(t)$ (注: 设 $p(t)$ 是时间 t 的连续函数), 其变化率为已掌握新知识的人数和未掌握新知识的人数之积, 求 t 时刻掌握新知识的人数 $p(t)$ 的表达式.

四、(本题 25 分) 设直线 $y = ax$ 与抛物线 $y = x^2$ 所围成的面积为 S_1 , 它们与直线 $x = 1$ 所围成的图形面积为 S_2 , 并且 $0 < a < 1$.

1. 试确定 a 的值, 使 $S_1 + S_2$ 达到最小, 并求出最小值;
2. 求该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

五、(本题 15 分) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 且 $f''(x) > 0$, 证明 $f(x) \geq x$.