华东师范大学 共 3 页

2003年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目：高等数学（A）

招生专业：

一、填空题(每小题5分, 共40分)

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{\ln x}}=$ ________

2. 设 $f(x)=\int_0^x(3t^2+2t+1)\,\mathrm{d}t$, 求 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=$ ________

3. 设 $y=x\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}$, 则其图形的斜渐近线为 ________

4. 设 $\mathbf{a}=\{1,-2,3\}$, $\mathbf{b}=\{-2,2,1\}$, 则与 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 平行的单位向量是 ________

5. 设 $z=x^y$, 则 $\mathrm{d}z=$ ________

6. 设 C 是以 $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ 为顶点的正方形边界正向一周, 则曲线积分 $\oint_c y\,\mathrm{d}x-(\mathrm{e}^{y^y}+x)\,\mathrm{d}y=$ ________

7 设 $f(x)=\begin{cases}0, & 2\le|x|\le\pi,\\ x, & |x|<2.\end{cases}$ 函数 $f(x)$ 展开为周期 $T=2\pi$ 的傅里叶级数的和函数为 $S(x)$, 则 $S(-2)=$ ________

8 微分方程 $(x^2+xy^2)\,\mathrm{d}x+(x^2y+y)\,\mathrm{d}y=0$ 的通解是 ________

二、计算题(每小题8分，共40分)

1. 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$.

2. 求由 $y=\sin x \quad (0\le x\le \pi)$, $y=0$ 所围平面图形绕 y 轴旋转一周所成旋转体体积.

3. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\ne(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0), \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的连续性、可微性和一阶偏导数的存在性.

4. 计算二重积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}\,\mathrm{d}y$.

5. 将 $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$ 在 $x=1$ 处展成幂级数并给出收敛域.

三、(8分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二次可导，并且 $f''(x)<0$, $f(0)=0$. 证明对于 $a\in[0,1]$ 有 $f(a)\le 2f(\frac{a}{2})$.

四、(12分) 计算 $I=\iint_{\Sigma} yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的外侧在 $z\ge 0$ 部分.

五、(16分) 求 $f(x)=3x^2+x^2|x|$ 在 $x=0$ 处存在的最高阶导数.

六、(16分) $f(x)$ 为偶函数且满足

$$f'(x)+2f(x)-3\int_0^x f(t-x)\,\mathrm{d}t=-3x+2,$$

求 $f(x)$.

七、(18分) 给定正数列$\{\lambda_n\}$, $2>\lambda_n>0$, $\lambda_n\to 0\ (n\to\infty)$. 分别定义函数列 $\{u_n(x)\}$, $\{v_n(x)\}$ 如下(其中 $x\in[-1,1]$):

$$u_n(x)=\ln\frac{a_n}{\left(1+\frac{\lambda_n a_n}{8}x^2\right)^2},\ \text{其中}\ a_n=\frac{32}{\lambda_n^2}\left(1-\frac{\lambda_n}{4}-\sqrt{1-\frac{\lambda_n}{2}}\right).$$

$$v_n(x)=\ln\frac{b_n}{\left(1+\frac{\lambda_n b_n}{8}x^2\right)^2},\ \text{其中}\ b_n=\frac{32}{\lambda_n^2}\left(1-\frac{\lambda_n}{4}+\sqrt{1-\frac{\lambda_n}{2}}\right).$$

1. 证明: $\forall x\in[-1,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)=0$.

2. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}v_n(0)=+\infty$;

$$\forall x\neq 0,\quad \lim_{n\to\infty}v_n(x)=4\ln\frac{1}{|x|}.$$

3. 验证: $\{u_n(x)\}$, $\{v_n(x)\}$ 都满足方程

$$\begin{cases} u''+\frac{1}{x}u'+\lambda_n\mathrm{e}^u=0, & \forall x\in(0,1),\\ u(\pm 1)=0. \end{cases}$$