7. 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$的秩为5, 其部分组$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$的秩为$t$, 则以下哪个值$t$不可能取到?

(A) 2; (B) 3;

(C) 4; (D) 5.

( )

8. 以下向量组中线性无关的是

(A) $\alpha_1 = (1,2,3,4)$, $\alpha_2 = (4,3,2,1)$, $\alpha_3 = (1,1,1,1)$;

(B) $\alpha_1 = (2,-2,0,0)$, $\alpha_2 = (0,1,-1,0)$, $\alpha_3 = (0,0,3,-3)$;

(C) $\alpha_1 = (1,2,4)$, $\alpha_2 = (1,3,9)$, $\alpha_3 = (1,4,16)$, $\alpha_4 = (1,5,25)$;

(D) $\alpha_1 = (1,-1,1,-1)$, $\alpha_2 = (0,0,0,0)$, $\alpha_3 = (-1,2,-3,4)$.

( )

9. 如果U和W是线性空间V的维数相等的子空间, 且子空间$U+W$和$U\cap W$的维数分别为8和2, 则U的维数等于__________.

10. 已知

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

则$(A^{\mathrm{T}})^{-1} =$ ____________________.

11. 已知3阶方阵A的三个特征值为4, 5, 6, 则$|A| =$ __________.

12. 实数域上3阶复反对称矩阵关于矩阵通常的加法和数乘构成线性空间, 则此线性空间的维数等于__________.

13. 设A, B, C, D是同阶的方阵, 且A与B相似, C与D相似, 则$A+C$与$B+D$相似.

( )

14. 如果欧几里得空间上的线性变换$\mathcal{A}$将每个正交基映为正交基, 则$\mathcal{A}$是正交变换.

( )

15. 设A是实n阶方阵, 则A与$A^{\mathrm{T}}A$有相同的秩.

( )

计算题(共4小题)

16. (12分) 计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

17. (12分) 已知矩阵A的特征多项式$f(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 13\lambda - 6$, 求矩阵$A^3$的特阵多项式$g(\lambda)$.

18. (12分) 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

求:

(1) A的不变因子; (2) A的初等因子; (3) A的若尔当标准形.

19. (14分) 已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

求正交矩阵T, 使$T^{\mathrm{T}}AT$为对角矩阵.

三、证明题(共3小题)

20. (15分) 设$f(x)$, $g(x)$为数域K上互素的多项式, C为K上的n阶方阵, $A = f(C)$, $B = g(C)$. 证明: 方程$ABX = 0$的每一解X均可唯一地表为$X = Y + Z$的形式, 其中Y, Z分别为方程$BY = 0$与$AZ = 0$的解.

21. (15分) 设A是实对称矩阵. 证明:

(1) 当实数λ充分大之后, $\lambda E + A$是正定的;

(2) A是半正定当且仅当对任何实数$\lambda > 0$, $\lambda E + A$都正定.

22. (10分) 证明: 特征根全为实数的正交矩阵是对称矩阵.