17

712

华 东 师 范 大 学　　　　共　　页

2004年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目： 数学分析

招生专业：

考生注意：

无论以下试题中是否有答题位置，均应将答案做在考场另发的答题纸上（写明题号）。

一.(30分)计算题.

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x-\dfrac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.
2. 若 $y=e^{-\ln^2 x}+x\sin(\arctan x)$, 求 y'.
3. 求 $\int\dfrac{xe^{-x}}{(1-x)^2}dx$.
4. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的和函数 $f(x)$.
5. L 为过 $O(0,0)$ 和 $A(0,a)$ 的曲线 $y=a\sin x(a>0)$,
   求 $\int_L(x+y^3)dx+(2+y)dy$.
6. 求曲面积分 $\int\int_S(2x+z)dydz+zdxdy$, 其中 $z=x^2+y^2,(0\le z\le 1)$, 取上侧.

二.(30分)判别题(正确的证明，错误的举出反例).

1. 若 $\{x_n,n=1,2,\cdots,\}$ 是互不相等的非无穷大数列,则 $\{x_n\}$ 至少存在一个聚点 $x_o\in(-\infty,+\infty)$.
2. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续有界, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.
3. 若 $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积,则
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})g(\frac{i-1}{n})=\int_0^1 f(x)g(x)dx.$$
4. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.
5. 若在 R^2 上定义的函数 $f(x,y)$ 存在偏导数 $f_x(x,y),f_y(x,y)$,
   且 $f_x(x,y),f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 上连续, 则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 上可微.
6. $f(x,y)$ 在 R^2 上连续, $D_r(x_0,y_0)=\{(x,y)|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le r^2\}$,
   若 $\forall(x_0,y_0),\forall r>0$, $\int\int_{D_r}f(x,y)dxdy=0$, 则 $f(x,y)=0,(x,y)\in R^2$.

三. (15分) 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$,

求证：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有最大值或最小值.

四. (15分) 求证不等式: $2^x \geq 1+x^2, x\in[0,1]$.

五. (15分) 设 $f_n(x), n=1,2,\cdots$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

若 $\forall x\in[a,b], f(x)>0$.

求证: $\exists N,\delta>0$, 使 $\forall x\in[a,b], n>N$, $f_n(x)>\delta$.

六. (15分) 设 $\{a_n\}$ 满足

(1) $0\leq a_k\leq 100a_n, n=k+1,k+2,\cdots$;

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

求证: $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$.

七. (15分) 若函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续，求证: $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[1,+\infty)$上有界.

八. (15分) 设 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在 R^3 有连续偏导数, 而且对以任意点 (x_0,y_0,z_0) 为中心以任意正数 r 为半径的上半球面

$S_r:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2, z\geq z_0$,

恒有 $\int\int_{S_r} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy=0$.

求证: $\forall(x,y,z), R(x,y,z)=0, P_x(x,y,z)+Q_y(x,y,z)=0$.