

华东师范大学

共2页

2005年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目: 数学分析与高等代数

招生专业

考生注意:

无论以下试题中是否有答题位置, 均应将答案做在考场另发的答题纸上(写明题号)

数学分析部分

一. (每题6分, 共12分)判断下列命题的真伪(正确的命题请简要证明, 错误的命题请举出反例):

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ 的一个充要条件是: 存在正整数 N , 对于任意正数 ϵ , 当 $n > N$ 时均有 $|a_n - A| < \epsilon$.2. 设 $a_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = 0$, 那么正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

二. (每题8分, 共32分)计算下列各题:

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sin^2 n + 2 \cos^2 n}$.2. 求 $\int \int_{x^2+y^2 \leq 1} |3x+4y| dx dy$.3. 设 $f(1,1)=1, f'_x(1,1)=a, f'_y(1,1)=b, g(x)=f(x, f(x, f(x, x)))$, 求 $g'(1)$.4. 设椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x > 0, y > 0, z > 0$ 的切平面与三个坐标平面所围成的几何体的最小体积.

三. (第1题, 第2题每题10分, 第3题11分, 共31分)证明以下各题:

1. 设 $f(x)$ 在有限区间 (a, b) 上一致连续. 求证: $f(x)$ 在区间 (a, b) 上有界.2. 设 $f(x, y)$ 在 $[a, b] \times [c, d]$ 上连续. 求证: $g(y) = \max_{x \in [a, b]} f(x, y)$ 在 $[c, d]$ 连续.3. 设 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上的连续, 有界函数, 并且对于任意实数 c , 方程 $f(x) = c$ 至多只有有限个解. 求证: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在.

高等代数部分

一、填空、选择、是非题(共9小题, 满分36分, 每小题4分)

1. 设3阶方阵 A 的特征值为2, 3, 5, 则 $|2A - E| =$ _____.
2. 如果 a 是 $f'''(x)$ 的2重根, 则 a 一定是多项式 $f(x)$ 的5重根.
3. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \geq 2)$ 线性相关, 且其中任意 $s-1$ 个向量线性无关, 则存在全不为零的数 k_1, k_2, \dots, k_s , 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$.
4. 设 W_1 与 W_2 分别是数域 K 上8元齐次线性方程组 $AX = 0$ 与 $BX = 0$ 的解空间. 如果 $\text{rank} A = 3$, $\text{rank} B = 2$, 且 $W_1 + W_2 = K^8$, 那么 $\dim(W_1 \cap W_2) =$ _____.
5. 若三次实系数多项式 $f(x)$ 恰有一个实根, Δ 为 $f(x)$ 的判别式, 则
(A) $\Delta > 0$; (B) $\Delta = 0$; (C) $\Delta < 0$; (D) $\Delta \notin \mathbb{R}$.
6. 设 A 是行列式等于 -1 的正交变换, 则_____一定是 A 的特征值.
7. 排列 $j_1 j_2 \cdots j_{n-1} j_n$ 与排列 $j_n j_{n-1} \cdots j_2 j_1$ 具有相同的奇偶性的充分必要条件是 $n \equiv$ _____
(mod 4).
8. 以下各向量组中线性无关的向量组为:
(A) $(2, -3, 4, 1), (5, 2, 7, 1), (-1, -3, 5, 5)$; (B) $(12, 0, 2), (1, 1, 1), (3, 2, 1), (4, 78, 16)$;
(C) $(2, 3, 1, 4), (3, 1, 2, 4), (0, 0, 0, 0)$; (D) $(1, 2, -3, 1), (3, 6, -9, 3), (3, 0, 7, 7)$.

9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $A^{-1} =$ _____.

二、计算题(共2小题)

10. (12分) 求实二次型 $f(x_1, \dots, x_n) = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n + x_n x_1)$ 的正惯性指数、负惯性指数、符号差以及秩.
11. (17分) 讨论 $b_1, b_2, \dots, b_n (n \geq 2)$ 满足什么条件时下列方程有解, 并求解.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = b_1 \\ x_2 + x_3 = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-1} + x_n = b_{n-1} \\ x_n + x_1 = b_n. \end{cases}$$

三、证明题(共1小题)

12. (10分) 证明: 如果 n 阶行列式 D_n 中所有元素都为1或 -1 , 则当 $n \geq 3$ 时, $|D_n| \leq (n-1)(n-1)!$.