华东师范大学

2005年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目：数学分析

招生专业

考生注意：

无论以下试题中是否有答题位置，均应将答案做在考场另发的答题纸上（写明题号）

一.(每题6分,共24分)判断下列命题的真伪(正确的命题请简要证明,错误的命题请举出反例)

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 的一个充要条件是：存在正整数 N，对于任意正数 ϵ，当 $n > N$ 时均有 $|a_n - A| < \epsilon$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，那么 $(f(x))^2$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

3. 设 $a_n > 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = 0$，那么正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

4. $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 沿任意方向的方向导数都存在，则函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续.

二.(每题8分,共64分)计算下列各题:

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$.

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin^2 n + 2\cos^2 n}$.

3. 求曲线 $x^y = x^2 y$，在 $(1,1)$ 处的切线方程.

4. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，$g(t) = \int_{t^2}^{e^t} f(x)dx$. 求 $g'(t)$.

5. 求 $\iint_{x^2+y^2\leq 1}|3x+4y|dxdy$.

6. 设 $f(1,1)=1, f'_x(1,1)=a, f'_y(1,1)=b$, $g(x)=f(x,f(x,f(x,x)))$, 求 $g'(1)$.

7. 设 S 是有向曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, 外侧. 求第二型曲面积分 $\iint_S zdxdy$.

8. 设椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, x>0, y>0, z>0$ 的切平面与三个坐标平面所围成的几何体的最小体积.

三. (第1题至第4题每题12分,第5题14分,共62分)证明以下各题:

1. 设 $f(x)$ 在有限区间 (a,b)上一致连续. 求证: $f(x)$ 在区间 (a,b)上有界.

2. 已知 $a_{2n-1}=\frac{1}{n}, a_{2n}=\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx$. 求证: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛.

3. 设 $f(x)$ 在区间$[a,b]$连续, $f(x)>0$. 求证：函数列 $\{\sqrt[n]{f(x)}\}$在 $[a,b]$ 上一致收敛于1.

4. 设 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续. 求证: $g(y)=\max_{x\in[a,b]}f(x,y)$在$[c,d]$ 连续.

5. 设 $f(x)$在区间$[a,+\infty)$上的有界连续函数, 并且对于任意实数 c, 方程 $f(x)=c$ 至多只有有限个解. 求证: $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 存在。