

考试科目: 高等数学 A

招生专业:

考生注意:

无论以下试题中是否有答题位置, 均应将答案做在考场另发的答题纸上 (写明题号)。

一、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分)

1、 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+2x) \cot 3x =$ _____。

2、设 $f\left(\frac{1}{2}x\right) = \sin x$, 则 $[f(f(x))]' =$ _____。

3、设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $F(x) = \int_x^{-x} f(t) dt$, 则 $F'(x) =$ _____。

4、设 $z = f(2x-y) + \varphi(x, xy)$, 其中函数 $f(t)$ 二阶可导, $\varphi(u, v)$ 具有二阶偏导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____。

5、已知曲线 $y = f(x)$ 过点 $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, 且其上任一点 (x, y) 处的切线的斜率为 $x \ln(1+x^2)$, 则 $f(x) =$ _____。

6、设 $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 $|2A^*| =$ _____。

二、选择题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分)

7、设 $f(x) = 2^x + \cos x - 2$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时,

- (A) $f(x)$ 是与 x 等价的无穷小量;
- (B) $f(x)$ 是与 x 同阶但不等价的无穷小量;
- (C) $f(x)$ 是比 x 较高阶的无穷小量;
- (D) $f(x)$ 是比 x 较低阶的无穷小量。

8、设函数 $f(x)$ 对任意 x 均满足等式 $f(1+x) = af(x)$ ，且有 $f'(0) = b$ 。其中 a, b 为非零常数，则

- (A) $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导；
 (B) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1) = a$ ；
 (C) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1) = b$ ；
 (D) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1) = ab$ 。

9、设 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上严格单调递增且连续，则有

- (A) $\int_0^1 f(x) dx = 2 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx$ ； (B) $\int_0^1 f(x) dx > 2 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx$ ；
 (C) $\int_0^1 f(x) dx < 2 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx$ ； (D) A、B、C 都不对。

10、设 k 为常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k+n}{n^2}$

- (A) 发散； (B) 绝对收敛；
 (C) 条件收敛； (D) 敛散性与 k 的值有关。

11、微分方程 $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$ 的一个特解是

- (A) $y = \frac{1}{5}e^{4x}$ ； (B) $y = 5xe^{4x}$ ；
 (C) $y = \frac{1}{5}xe^{4x}$ ； (D) $y = 5e^{4x}$ 。

12、与矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 相似的矩阵是

- (A) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ； (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ； (C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ； (D) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 。

三、解答题

13、已知 $x^3 + y^3 + 3xy - 6y - 7 = 0$, 求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=2}$ 。(本题满分 10 分)

14、计算不定积分 $\int \frac{x dx}{(x^2 + 1)\sqrt{1 - x^2}}$ 。(本题满分 10 分)

15、求 $\iint_D (x + y) dx dy$, 其中区域 D 由曲线 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 与直线 $x + y = 2$ 所围成。(本题满分 11 分)

16、求曲面积分 $\iint_{\Sigma} (x + y + z) dS$, 其中区域 Σ 是 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ($R > 0$) 在 $z \geq 0$ 的半球面。

(本题满分 12 分)

17、将函数 $f(x) = x \arctan x - \ln \sqrt{1 + x^2}$ 展开为 x 的幂级数。(本题满分 12 分)

18、求微分方程 $(1 + y^2) dx + (x - \arctan y) dy = 0$ 的通解。(本题满分 11 分)

19、已知 $f(x) = \begin{vmatrix} x-1 & x+1 & 1 & 3 \\ 3+x & 3-x & x & 3 \\ 2 & x & x+1 & 7-x \\ -2 & 2 & x+2 & 6+3x \end{vmatrix}$, 证明 $f'(x) = 0$ 有小于 1 的正根。(本题满分 12

分)

20、设 A 为 n 阶方阵, 证明 $r(A^n) = r(A^{n+1})$ 。(本题满分 12 分)

21、设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 有四阶导数, 在 $f(-1) = f(0) = f(1)$, $f''(0) = 0$ 。证明存在 $\xi \in (-1, 1)$,

使得 $f^{(4)}(\xi) = 0$ 。(本题满分 12 分)