11. 以下各向量组中线性无关的向量组为:

(A) $(2,-3,4,1)$, $(5,2,7,1)$, $(-1,-3,5,5)$; (B) $(12,0,2)$, $(1,1,1)$, $(3,2,1)$, $(4,78,16)$;

(C) $(2,3,1,4)$, $(3,1,2,4)$, $(0,0,0,0)$; (D) $(1,2,-3,1)$, $(3,6,-9,3)$, $(3,0,7,7)$.

12. 由标准欧几里得空间$\mathbf{R}^4$中的向量组$\alpha_1=(1,0,1,1)$, $\alpha_2=(1,-1,-1,0)$, $\alpha_3=(2,0,-1,-1)$张成的子空间W的一组规范正交基为________.

13. 设V是n维欧几里得空间, W是V的子空间, 则$(W^{\perp})^{\perp}$ ________ W.

(A) $\subset$; (B) $\supset$; (C) $=$; (D) $\neq$.

14. $A=\begin{pmatrix}1&2&-1&-2\\1&1&-1&-1\\0&0&1&2\\0&0&1&1\end{pmatrix}$的逆矩阵$A^{-1}=$________.

15. 设$\mathcal{A}$是有限维线性空间V上的线性变换. 如果$V\neq \mathrm{Ker}\mathcal{A}+\mathrm{Im}\mathcal{A}$, 则$\mathrm{Ker}\mathcal{A}\cap\mathrm{Im}\mathcal{A}\neq\{0\}$.

二、计算题(共4小题)

16. (12分) 求实二次型$f(x_1,\cdots,x_n)=2\sum_{i=1}^n x_i^2-2(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n+x_nx_1)$的正惯性指数、负惯性指数、符号差以及秩.

17. (18分) 讨论$b_1,b_2,\cdots,b_n\ (n\geqslant 2)$满足什么条件时下列方程有解, 并求解.

$$\begin{cases}x_1+x_2=b_1\\x_2+x_3=b_2\\\quad\cdots\cdots\cdots\\x_{n-1}+x_n=b_{n-1}\\x_n+x_1=b_n.\end{cases}$$

18. (12分) 试在有理数域、实数域以及复数域上将$f(x)=x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$分解为不可约因式的乘积(结果用根式表示), 并简述理由.

19. (18分) 已知$g(\lambda)=(\lambda^2-2\lambda+2)^2(\lambda-1)$是6阶方阵$A$的极小多项式, 且$\mathrm{Tr}(A)=6$. 试求

(1) A的特征多项式$f(\lambda)$及其若尔当典范型;

(2) A的伴随矩阵A^*的若尔当典范型.

三、证明题(共3小题)

20. (10分) 设$f(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$是实对称矩阵$A$的特征多项式. 证明: A是负定矩阵的充分必要条件是$a_1,\cdots,a_{n-1},a_n$均大于零.

21. (10分) 证明: 如果n阶行列式D_n中所有元素都为1或-1, 则当$n\geqslant 3$时, $|D_n|\leqslant(n-1)(n-1)!$.

22. (10分) 证明: 每个秩为r的n阶$(r<n)$实对称矩阵均可表示为$n-r$个秩为$n-1$的实对称矩阵的乘积.