1999 年上海交通大学微分方程(常微分方程、偏微分方程）试题

1999 年上海交通大学微分方程(常微分方程、偏微分方程）试题

一.填空题(36 分):

1. $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 有仅含变量 x 的积分因子，那么 M,N 应满足条件 ______________________________.

2. 设 G 是平面开区域，$f(x,y)\in C^1(G)$，方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 的饱和解 $y=\varphi(x)$ 最大存在区间的右端点 $d<+\infty$，那么当 $x\to d-0$ 时，$\varphi(x)$ 或者 __________，或者 ______________________________.

3. 二阶线性微分方程 $x''+p(t)x'+q(t)x=f(t)$ 的三个线性无关的解分别为 $x_1(t)$，$x_2(t)$ 和 $x_3(t)$. 那么这个方程的通解可以写为 $x=$ ______________________________.

4. 实常系数方程 $\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n x=0$ 的特征方程有两重根 $\alpha+i\beta$（α，β 为实数，$\beta\neq 0$），那么它必有下列四个线性无关的实解 ______________________________.

5. 方程 $t^2x''+5tx'+13x=0$ 的基本解组为 ______________________________.

6. 方程组 $\begin{cases} x'=-x-y \\ y'=x+y^2 \end{cases}$ 的奇点是 __________ 和 __________，它们的类型分别是 __________ 和 __________；它们对应的驻定解的稳定性情况分别为 __________ 和 __________.

7. 方程 $u_{xx}-2u_{xy}+2u_{yy}=0$ 的特征方程是 ______________________________ 通过变换 $\xi=$ __________，$\eta=$ __________；可将原方程化为 ______________________________，该方程属于 __________ 型.

8. 对热方程 $u_t-a^2u_{xx}=0$，若初值 $u|_{t=0}=\varphi(x)$ 是连续有界函数，那么这问题的一个解可表达为 ______________________________.

9. 非齐次波动方程的 Cauchy 问题 $u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t)$，$-\infty<x<+\infty$ ；$u|_{t=0}=0$，$u_t|_{t=0}=0$ 的解，据齐次化原理，可表为 $u(x,t)=$ ______________ 其中 $w(x,t,\tau)$ 满足方程 ______________ 和初始条件 ______________.

10. 单位园上的调和函数连续到边界，它在园周上取值为 $1+\sin\theta$（θ 为极角），那么它在圆心的值为 ______________.

11. 函数 u 在有界连通区域 Ω 上满足 $\Delta u=0$ 且在 Ω 内某点达到 u 的最大值 5，那么 u 在 Ω 的最小值是 ______________.

12. 写出调和方程在半平面 $\{(x,y,)|y>0\}$ 上 Dirichlet 问题的 Green 函数

______________.

二. 计算题(32 分)

1. 用常数变易法解方程 $x''+2x'+2x=\dfrac{1}{e^t\sin t}$

2. 矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，试求：方程组 $X'=AX$ 的基解矩阵；

3. 试用分离变量法解：

$$\begin{cases}u_{tt}-4u_{xx}=0, & t>0, \quad 0<x<\pi,\\ u|_{x=0}=0, & u|_{x=\pi}=0\\ u|_{t=0}=\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{5x}{2}, & u_t|_{t=0}=\sin x\end{cases}$$

4. 试解圆域上的边值问题：

$$\begin{cases}\Delta_2 u=1,\ r<1 & ;\\ u|_{r=1}=\sin\theta.\end{cases} \qquad (\varphi,\theta) \text{ 是极坐标}$$

三. 讨论题（10 分）

试判别方程组$\begin{cases} x' = y + \alpha x(x^2 + y^2) \\ y' = -x + \alpha y(x^2 + y^2) \end{cases}$（其中$\alpha$为常数）的零解的稳定性，

在稳定的情况下须确定是否渐近稳定.

四. 证明题（22 分）

(1) 若$y(x) \in C[a,b]$，$y(x) \geq 0$，且$y(x) \leq 1 + \int_a^x y(\xi)d\xi$，

用逐次逼近法或其他方法证明：

$$y(x) \leq e^{x-a}$$

(2) 设Ω是三维有界单连通区域，Γ为其边界、Green 函数

$$G(M, M_o) = \frac{1}{4\pi r} - g$$

其中$M_o \in \Omega$为固定点，M为三维空间中任意点，r为$M_o M$间的距离，函数g满足

$$\begin{cases} \Delta g = 0 \\ g\big|_\Gamma = \frac{1}{4\pi r} \end{cases}$$

试证：在Ω（除M_o外）成立不等式：

$$0 < G < \frac{1}{4\pi r}$$