上海交通大学

2000年硕士生入学考试试题　　1-1

试题序号 43

试题名称 高等代数

（答案必须写在答题纸上，否则答题无效）

一. (10 分) 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ b & x & a & \cdots & a & a \\ b & b & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix}$。

二. (12 分) 设A 和D 为n 阶正定矩阵。已知矩阵B 是方程 $AX + XA = D$ 的唯一解。求证：（1）B 是实对称矩阵；（2）B 是正定矩阵。

三. (10 分) 设 $R[x]$ 为次数小于等于2 的实系数多项式全体。令 $f_1 = 1$; $f_2 = x-1$; $f_3 = (x-2)(x-1)$。试证 f_1, f_2, f_3 是 $R[x]$ 的一组基。

四. (12 分) 设A 为三阶实对称矩阵，特征值为1,2,3。对应于1,2 的特征向量分别为 $a_1 = (-1,-1,1)^T$, $a_2 = (1,-2,-1)^T$。求：（1）对应于3 的特征向量 a_3;（2）矩阵A。

五. (12 分) 已知线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = \lambda \end{cases}$，其中 λ 为常数。问：（1）λ 取何值时，该方程组无解？（2）λ 取何值时，该方程组有解？求出其通解。

六. (12 分) 已知二次型 $f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_2x_3 (a > 0)$。通过正交变换化为标准型 $f = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$。求参数 a 及所用的正交变换矩阵。

七. (12 分) A,B,C 均为n 阶方阵，$M = \begin{pmatrix} A & A \\ C-B & C \end{pmatrix}$。（1）试证M 可逆的充要条件是AB 可逆；（2）如M 可逆，试求逆矩阵。

八. (10 分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$。求 A 的不变因子，初等因子及Jordan 标准型。

九. (10 分) 设V 是n 维欧氏空间，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 是V 的一组基。证明：对于任意n 个实数 $b_1, b_2, \ldots, b_n$，恰有一个向量 $\alpha \in V$，使得 $(\alpha, \alpha_i) = b_i, i = 1, 2, \ldots, n$。