ΓΨ

上海交通大学

2001年硕士研究生入学考试试题

试题序号：423　试题名称：高等代数

（答案必须写在答题纸上，写在试题纸上的一律不给分）

1. （10 分）在数域 Z/5Z 上将多项式 x^4+x^2+1 分解为不可约多项式的乘积。

2. （10 分）求解如下矩阵方程：$P\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

3. （10 分）解线性方程组：
$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=2\\ x_1+c_2^1x_2+\cdots+c_n^1x_n=2\\ x_1+c_3^2x_2+\cdots+c_{n+1}^2x_n=2\\ \cdots\cdots\\ x_1+c_n^{n-1}x_2+\cdots+c_{2n-2}^{n-1}x_n=2 \end{cases}$$

4. （10 分）求向量组 $\{(x_1,x_2,\cdots,x_{64}) \mid x_i=1 \text{或} -1\}$ 的极大正交向量子组所含向量的个数，并说明理由。

5. （10 分）设 a,b,c 是三维线性空间的一组基，A 是这个空间的线性变换，它使 Aa=3a-2b+3c; Ab=2a-2b+6c; Ac= -a+2b-c 。(1) 求 A 在基 a,b,c 下的矩阵；(2) 求 A 的特征值和线性无关的特征向量；(3) 给出可逆矩阵 T 和对称矩阵 D，使得 $T^{-1}AT=D$。

6. （10 分）用正交变换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$，为标准型，并给出所施行的正交变换。

7. （10 分）用初等变换将 λ 矩阵 $\begin{pmatrix}\lambda^3-\lambda & 2\lambda^2\\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda\end{pmatrix}$ 化为标准形。

8. （10 分） 设 A 为 n 阶实对称矩阵。证明对充分小的正数 a，矩阵 E+aA 是正定矩阵，其中 E 是 n 阶单位矩阵。

9. （10 分）设 A 为 n 阶方阵。 矩阵 E-A 的特征值的绝对值均小于 1，其中 E 是 n 阶单位矩阵。试证：矩阵 A 的行列式的值严格地介于 0 和 2^n 之间。

10. （10 分）设 V_1，V_2 是线性空间 V 的子空间， 且 $\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1\cap V_2)+1$。证明只有两种可能：$V_1+V_2=V_1$ 且 $V_1\cap V_2=V_2$， 或 $V_1+V_2=V_2$ 且 $V_1\cap V_2=V_1$。