上海交通大学

2002年硕士研究生入学考试试题

试题序号：315　试题名称：数学分析

（答案必须写在答题纸上，写在试题纸上的一律不给分）

一．判断题（以下各题，对的要证明，错的要举反例并说明理由）

1．若 $a_n \le x_n \le b_n$，$n \in N$，而数列 $\{x_n\}$ 收敛，$b_n - a_n \to 0\ (n\to\infty)$，则数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 必都收敛（6分）．

2．若函数 $f(x)$ 在 R 上连续且有界，则 $f(x)$ 在 R 上必一致连续（6分）．

3．若函数 $f(x)$ 恒正连续，且无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$（6分）．

4．若函数列 $\{f_n(x)\}$、$\{g_n(x)\}$ 均在区间 I 上一致收敛，则 $\{f_n(x)\cdot g_n(x)\}$ 必在 I 上一致收敛（6分）．

二．设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，且

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)] = 0$$

证明 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续（10分）．

三．设 $f(x)$ 在 R 上二次可导，$f''(x) > 0$．又存在一点 x_0 使 $f(x_0) < 0$，且

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = a < 0,\quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = b > 0$$

证明 $f(x)$ 在 R 上有且仅有两个零点（10分）．

四．设 $f(x)$ 在 R 上连续，又 $\varphi(x) = f(x)\cdot\int_0^x f(t)dt$ 单调递减，证明 $f(x)=0$，$x \in R$（10分）．

五．讨论级数

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}[e-(1+\frac{1}{n})^n]^p\ (p\in R)$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})\frac{\sin nx}{n}\ (0<x<\pi)$．

的敛散性（16分）．

六．设曲面$z=\sqrt{a^2-2x^2-y^2}$在第一卦限内的切平面与三坐标轴分别交于A、B、C三点，求四面体O-ABC的最小体积（10分）.

七．称$f(x)$在点x_0处严格递增，是指：$\exists\delta_0>0$，$\forall x\in(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)$，当$x<x_0$时$f(x)<f(x_0)$，而当$x>x_0$时$f(x)>f(x_0)$.

现设$f(x)$在$[a,b]$上每点处均严格递增，证明$f(x)$在$[a,b]$上严格递增.（10分）.

八．设$f(x)\in C[0,1]$，证明

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^\lambda f\left(\frac{x}{\lambda}\right)\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}f(0)$$ （10分）