上海交通大学

2003年硕士研究生入学考试试题

1-1

试题序号：315　试题名称：数学分析

（答案必须写在答题纸上，写在试题纸上的一律不给分）

一、判断以下各题，正确的给出证明，错误的举反例并说明理由.（每小题6分，共24分）

1) 若$f(x)$在$\mathbb{R}$上有定义，且在所有无理点处连续，则$f(x)$在$\mathbb{R}$上处处连续.

2) 若$f(x), g(x)$连续，则$\varphi(x)=\min(f(x), g(x))$连续.

3) 任意两个周期函数之和仍为周期函数.

4) 若函数$f(x,y)$在区域D内关于x, y的偏导数均存在，则$f(x,y)$在D内必连续.

二、设$f(x)$在$[a,b]$上无界. 试证对任意$\delta>0$，在$[a,b]$上至少有一点x_0，使得$f(x)$在x_0的δ邻域上无界.（12分）

三、设$f(x)$对任意$x\in\mathbb{R}$有$f(x)=f(x^2)$且$f(x)$在$x=0$和$x=1$处连续. 试证明$f(x)$在$\mathbb{R}$上为常数。（12分）

四、已知$a_1, a_2, \cdots, a_n>0$，$(n\geq 2)$且$f(x)=\left(\dfrac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，试求$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.（12分）

五、若实系数多项式$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ $(a_0\neq 0)$的一切根均为实数。试证导函数$P_n'(x)$也仅有实根.（12分）

六、设$\{na_n\}$收敛，级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty} n(a_n-a_{n-1})$收敛. 试证级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.（12分）

七、设$y=\varphi(x)$ $(x\geq 0)$是严格单调增加的连续函数，$\varphi(0)=0$. $x=\psi(y)$是它的反函数。试证明对$a>0$, $b>0$有

$$\int_0^a \varphi(x)dx+\int_0^b \psi(y)dy \geq ab.$$（12分）

八、计算题（每小题12分，共24分）

1) 求函数$f(x,y,z)=x^4+y^4+z^4$在条件$xyz=1$下的极值.

2) 计算积分$I=\iiint\limits_V (y-z)\arctan z\,dxdydz$，其中V为由曲面$x^2+\frac{1}{2}(y-z)^2=R^2$，$z=0$及$z=h$所围成的区域.

九、设$g(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续，且对任意的$x\geq a$有$\lim\limits_{n\to+\infty} g(x+n)=A$，试证$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=A$。（10分）

十、试证

$$\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x(1+x)},\quad x>0.$$（10分）

十一、设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f(x)$是非线性函数。试证存在$\xi\in(a,b)$使得

$$f'(\xi)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$（10分）