上海交通大学

2004年硕士研究生入学考试试题

试题序号：423　试题名称：高等代数

（答案必须写在答题纸上，写在试题纸上的一律不给分）

[illegible]假设 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 为次数不超过 3 的首项系数为 1 的互异多项式。假设 [illegible]整除 $f_1(x^3)+x^4 f_2(x^3)$。试求 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的最大公因式。（15 分）

[illegible]表示数域 P 上所有 3×3 矩阵组成的线性空间。对于 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&2&2\end{pmatrix}$，求[illegible]可交换（即满足 $AB=BA$）的矩阵 B 组成的线性子空间的维数及一组基。

[illegible]阶数分别为 n,m 的实对称方阵 A 与 B，假设 m 阶矩阵 B 是正定矩阵。试证[illegible]存在非零矩阵 H，使得 $B-HAH^T$ 成为正定矩阵。（H^T 表示矩阵 H 的转置。）（[illegible]5分）

[illegible]设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 是 n 维欧氏空间中的向量组。证明：存在正交变换 τ 使得 $\tau(\alpha_i)=\beta_i$ 对于所有的 $i=1,2,\cdots,m$ 成立，当且仅当内积 $(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j),\forall i,j$　（25 分）

求下面多项式的所有根：

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-3 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \\ -a_2 & x-2-a_2^2 & -a_2a_3 & \cdots & -a_2a_n \\ -a_3 & -a_3a_2 & x-2-a_3^2 & \cdots & -a_3a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_n & -a_na_2 & -a_na_3 & \cdots & x-2-a_n^2 \end{vmatrix}.\qquad（15 分）$$

1-1

6. 用 V_1,V_2 分别表示以下两个关于未知数 x,y,z 的方程组的解空间：

$$\begin{cases} ax+y+z=0 \\ x+ay-z=0 \\ -y+z=0 \end{cases},\qquad \begin{cases} bx+y+z=0 \\ x+by+z=0 \\ x+y+bz=0 \end{cases}.$$

试确定 a,b 的值使得 V_1+V_2 为 V_1 与 V_2 的直和。（15 分）

7. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^3-6A^2+11A-6E=0$。试确定使得 $kE+A$ 可逆的数 k 的范围。（E 为单位矩阵）（15 分）

8. 对于数域 P 上的 n 维线性空间 V，假设存在 V 上的线性变换 σ,δ,τ，满足（1）$\tau\delta=0$；（2）σ 的秩小于 δ 的秩。试证明：τ 与 σ 至少有一个公共的特征向量。（15 分）

9. 如果数域 P 上的 n 维线性空间 V 的线性变换 σ 在 P 中有 n 个两两互异的特征值，试求出 σ 的不变子空间的个数（要求写出详细的解题过程）。（10 分）