上海交通大学

2005年硕士研究生入学考试试题

试题序号：423　试题名称：高等代数（含近世代数基础知识）

（答案必须写在答题纸上，写在试题纸上的一律不给分）

1. 下面的 n 元线性方程组何时无解、有唯一解、有无穷多组解？有解时，求出解：

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \text{(15 分)}$$

2. 假设 $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2-x & 2-x^2 & 2x^3-1 \\ 2x^2-1 & 3x^3-1 & 4x^3-1 \end{vmatrix}$.

(1) 证明：存在实数 $c(0 < c < 1)$，使得 $f'(c) = 0$，这里 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数；

(2) 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中将 $f(x)$ 分解为不可约因式之积。（共 15 分）

3. 对于 n 阶方阵 A 及 n 阶可逆方阵 B，假设 $r(E-AB)+r(E+BA)=n$. 求证：$r(A)=n$. (这里，$r(A)$ 表示矩阵 A 的秩。) (15 分)

4. 假设 $A_{m\times n}$ 是行满秩实矩阵，$m<n$. 命 $B=A^TA$ (A^T 表示 A 的转置)。(1) 试证明：使得 $X^TBX=0$ 的所有向量 X 构成 $\mathbb{R}^n$ 的一个线性子空间 W; (2) 求 W 的维数。(共 15 分)

5. 假设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 是一个实二次型。若有 n 维实向量 X_i 使得 $X_1^TAX_1>0, X_2^TAX_2<0$, 试证明：存在 n 维非零实向量 X_0 使得 $X_0^TAX_0=0$. (15 分)

6. (1) 假设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，而 σ_i 是 V 上的线性变换，且满足 $\sigma_1\sigma_2+\sigma_3\sigma_4=I_V$, $\sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i$ (其中 I_V 是 V 的恒等变换，$i,j=1,2,3,4$)。求证：$(\sigma_1\sigma_3)^{-1}(0)$ 是 σ_1 的核 $\sigma_1^{-1}(0)$ 与 $\sigma_3^{-1}(0)$ 的直和。

(2) 假设 n 阶方阵 A、B、C、D 关于矩阵乘法相互可以交换，如果 $AC+BD=E_n$, 试证明：$r(AB)=r(A)+r(B)-n$. (15 分)

7. 对于实数域上的 n^2 维线性空间 $V=\mathbb{R}^{n\times n}$ (n 阶方阵全体), 如下定义 V 上的一个二元实函数 $[-,-]$: $[P,Q]=\mathrm{tr}(P^TQ)$, 并记 $||P||^2=[P,P]$ (其中，$\mathrm{tr}(C)$ 为方阵 C 的对角线元素之和.)。

(1) 证明：V 关于 $[-,-]$ 成为一个欧氏空间；

(2) 对于半正定矩阵 P,Q, 命 $P+Q=R$. 求证：$||PQ||\leq\frac{1}{\sqrt{2}}||R||^2$. (10 分)

8. 用 V 表示数域 P 上的 n 阶方阵的集合。(1) 证明矩阵的等价是集合 V 上的一个等价关系; (2) 求等价类的个数; (3) 对于每个等价类，各写出一个代表元。(15 分)

9. 假设 G 为 n 阶循环群。记 $U_n=\{\overline{m}\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\mid(m,n)=1\}$. 求证：(1) U_n 关于 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的乘法作成群；(2) G 的自同构群 $Aut(G)$ 与 U_n 同构。(10 分)

10. 记 $F=\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. 求多项式 $f(x)=x^3+2x+1\in F[x]$ 在 F 上的一个分裂域 K, 并在 $K[y]$ 中将多项式 $f(y)$ 分解因式。(15 分)

11. 对于高斯整数环 $\mathbb{Z}[i]$,

(1) 求证 $\mathbb{Z}[i]/(2+i)\cong\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$;

(2) 求域 $\mathbb{Z}[i]/(2+i)$ 的特征。

(3) 如果 $a^2+b^2=p$ 是 $\mathbb{Z}$ 中的素数，试证明：$\mathbb{Z}[i]/(a+bi)\cong\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. (10 分)