

# 同济大学一九九八年硕士生入学考试试题

考试科目: 高等代数

编号: 25

答题要求:

一. 设  $0 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & x^2-5 & -2 & 6 \\ -3 & 2 & -1 & x^2+1 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$  求  $x$ . (10分)

二. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 2 & 0 \\ & 0 & 1 & 2 \\ & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

求矩阵  $X$  使  $X \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix} = C$  (10分)

三. 设  $V = M_2(R)$  是 2 阶实方阵全体所构成的线性空间. 任意  $A \in V$  有  $T(A) = A' + A$ , 其中  $A'$  表示  $A$  的转置. 证明  $T$  是  $V$  的线性变换. 并求  $T$  在基  $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  下的矩阵表示. (10分)

四. 问  $t$  取何值时, 二次型  $tx_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$  是负定? (10分)

五. 设  $A$  是  $n$  阶实可逆阵, 证明  $2(A'A)^{-1}$  是正定阵. (8分)

六. 设方阵  $A, B$  适合  $A^3 + 3A^2 + 7E = 0$ . 证明  $A$  可逆. (10分)

七. 问  $k$  取何值时, 下方程组  $AX = \beta$  (1) 有唯一解; (2) 无解; (3) 有无穷多组解, 这时求它的通解, 其中  $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ k & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  (14分)

八. 求正交变换化二次型  $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$  为标准型. (18分)

九. 设  $A, B$  是  $n$  阶方阵. 证明  $R(A) + R(B) \leq n$ , 其中  $R(A)$  是矩阵  $A$  的秩. (10分)