同济大学一九九九年硕士生入学考试试题

考试科目： 近世代数 编号： 135

答题要求： 不必抄题，但要标明题号；每小题10分.

一. 设$G=(a)$是一个n阶循环群，证明：

1. a^k是G的一个$\frac{[n,k]}{k}=\frac{n}{(n,k)}$阶元素；

2. G恰有$\phi(n)$个生成元，其中$\phi(n)$是Eulerϕ−函数，$\phi(n)$等于与n互素且小于n的正整数的个数.

二. 证明：

1. 设H,K,N都是G的子群，且H是N子群，则$HK\cap N=H(K\cap N)$；

2. 设H和K是G的两个有限子群，则$|HK|=\frac{|H||K|}{|H\cap K|}$.

三. 设$G=GL(2,Z)$是整数环Z上行列式等于±1的全体2阶矩阵所成的集合，

1. 证明G关于矩阵乘法成群；

2. 试求$x=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$在$G$内的中心化子$C_G(x)$；并证明$C_G(x)$与一个6阶循环群同构.

四. 设$R=M_3(Z)$是整数环Z上全体3阶矩阵所成的环，证明$B=\left\{\begin{pmatrix}0 & a & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \middle| a,b,c\in Z\right\}$是$R$一个子环，但不是$R$的一个理想；并求$B^2$和$B^3$.

五. 设$R[x]$是实数域R上的一元多项式环，证明：

1. $R[x]$中每个理想都是主理想；

2. 又设$f(x)=x^2+1$，$(f(x))$是$R[x]$中由$f(x)$生成的主理想，试描述商环$R[x]/(f(x))$的结构；由此你还能得到什么更一般的结果？

六. 两题中任选一题

1. 设R是一个布尔环，即对于每个$x\in R$，总有$x^2=x$，证明：R是一个交换环，并且对于每个$x\in R$，总有$x+x=0$.

2. 设$F=\{0,1\}$是只有2个元素的特征数为2的域，试求F上的一元多项式环$F[x]$中次数不超过3的全部不可约多项式.