同济大学一九九九年硕士生入学考试试题

考试科目： 高等数学　　　　**编号：** 138A－1

2

答题要求：

填空题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2-8}\right)^{x^2/2} =$ ____________ ;

(2) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0;\\ \ln(x+a), & x\geq 0,\end{cases}$ 问 $a=$ ______时该函数连续；

(3) $\int_{-1}^{1}\left[\dfrac{x^3}{1+x^8}+\sqrt{1-\cos^2 x}\right]dx =$ ____________ ;

(4) 已知 $y''+8y'+16y=e^x$ 的一个特解为 $\dfrac{e^x}{25}$，则它的通解为____________ ;

(5) 设 $z=\ln\left(x^2+\ln y\right)$，则 $dz=$ ____________ .

选择题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分，每小题有四个答案，只有一个是正确的)

(1) $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导的________

(A)必要条件；　(B)充分条件；　(C)充要条件；　(D)无关条件

(2) 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,x-\sin x}{x\ln\left(1+x^2\right)}=$

(A) 2；　(B) $\dfrac{1}{2}$；　(C) $\dfrac{1}{4}$；　(D) 0

(3) 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n+5)3^n}$ 的收敛区间为 ________ .

(A) $(-3,3)$；　(B) $(-3,3]$；　(C) $[-3,3)$；　(D) $[-3,3]$

(4) 已知 $\vec{a}=\{6,2,-3\}$，$\vec{b}=\{3,-4,5\}$，则________

(A) $\vec{a}\times\vec{b}=\{22,39,-30\}$；　(B) $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\pi-\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{14}$；

(C) $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直；　(D) $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行

(5) 若 $\sin(x^2)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)=$ ________

(A) $2x\sin(x^2)$；　(B) $2x\cos(x^2)$；　(C) $\sin(x^2)$；　(D) $\cos(x^2)$

三、计算下列各题(本题共有 5 小题，每题 6 分，满分 30 分)

(1)求 $\displaystyle\int\frac{x-\mathrm{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$；

(2)设 $\int_0^y e^{t^2}dt+\int_1^x \cos t\,dt=0$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$；

(3)设 $y=\sin^2 x$，求 $y^{(n)}$；

同济大学一九九九年硕士生入学考试试题

考试科目：高等数学　　　　编号：138A-2

答题要求：

(4)已知 $z = yf(x, \frac{y}{x})$，其中 f 二阶偏导连续，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$；

(5)求微分方程 $y'' + 5y' + 6y = 10 + e^x$ 的通解。

四、(本题 8 分)求过直线 $L_1: \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 6z = 3 \end{cases}$ 且平行直线 $L_2: \begin{cases} x - 4z + 4 = 0 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$ 的平面方程。

五、(本题 8 分)设函数 $f(x) = x\ (0 \le x \le \pi)$，试把 $f(x)$ 展开成正弦级数。

六、(本题 8 分)计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z\,dv$，其中 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 $z = 6 - x^2 - y^2$ 围成。

七、(本题 8 分)求椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ 上位于第一卦限内的一点 P，使椭球在点 P 处的切平面与三个坐标平面所围成的立体体积最小。

八、(本题 8 分)设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，对于任意的正整数 m、n 证明：方程 $mx^m f(x^m) = nx^n f(x^n)$ 在区间 $(0,1)$ 内总有解。