24 26

同济大学一九 99 年硕士生入学考试试题

考试科目： 高等代数　　　　**编号：** 132

答题要求：

一. 是非题,正确的在( )内打√,错误的打×.　(12 分)

1.设 T 是实数域上 n 维线性空间 V 上的线性变换,则在 V 上不一定存在 T 的特征向量。( )

2.设 V 是 n 级实矩阵全体, 对 V 中任意矩阵 A, 定义 T(A)= $A' + A^2$ 则 T 是 V 上线性变换。( )

3.任意一个实方阵必相似于一个实上三角阵。( )

二.设 $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & x^2-5 & -2 & 6 \\ -3 & 2 & -1 & x^2+1 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$ 求 x.　(8 分)

三.设 A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$,B=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,C=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & 2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$求矩阵 X 使 X$\begin{pmatrix} & B \\ A & \end{pmatrix} = C$

(8 分)

四. 设 V 是 2 阶实方阵全体所构成的线性空间. 任意 A∈V 有 T(A)= $A' + A$ 其中 A' 表示 A 的转置. 证明 T 是 V 的线性变换, 并求 T 在基

$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

下的矩阵表示。　(10 分)

五. 问 t 取何值时, 二次型 $tx_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$ 是负定?　(6 分)

六. 问 k 取何值时, 下方程组 AX=β (1)有唯一解;(2)无解;(3)有无群多组解, 这时求它的通解, 其中 A=$\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ k & 1 & 2 \end{pmatrix}$,$\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　(10 分)

七.求正交变换化二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 为标准型. (10 分)

八.设 A,B 是 n 阶方阵且 AB=0. 证明 R(A)+R(B)≤ n, 其中 R(A)是矩阵 A 的秩. (6 分)

九.设 V 是实数域 R 上的一个 n 维欧氏空间. 对任意向量 v,w∈V, (v,w)表示 v 和 w 的内积,

$\|v\| = \sqrt{(v,v)}$ 表示 v 的长度

1). 设 n 是奇数, A: V→ V 是 V 的一个正交变换. 证明:存在 V 中非零向量 v 使得 Av=v 或 Av=−v　(6 分)

2). 举例说明: 当 n 为偶数时, 1)的结论不一定成立.　(7 分)

3). 设变换.T: V→V 满足 (1) T(0)=0, (2) $\|T(v) - T(w)\| = \|v - w\|, \forall v, w \in$V.

证明 T 一定是 V 的线性变换.　(7 分)

十. 已知一个 2×2 的矩阵序列 $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ 其中 $M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$.设对任意正整数 n, 有 $M_{n+1} = AM_n + B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$,$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$

1)假设 $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} a_n & \lim\limits_{n\to\infty} b_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} c_n & \lim\limits_{n\to\infty} d_n \end{pmatrix}$ 存在, 试求 x=$\lim\limits_{n\to\infty} M_n$.　(5 分)

2)证明 $\lim\limits_{n\to\infty} M_n$ 确实存在.　(5 分)