

复 旦 大 学

1998 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

报考专业：基础数学
 计算数学
 应用数学
 运筹学与控制论

考试科目：数学分析

(共 2 页)

1. (每小题 8 分, 共 48 分)

(1) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} - 1}{x}$

(2) 通过代换 $\begin{cases} x = uv \\ y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \end{cases}$, 变换方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

(3) 设 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, 证明不等式

$$2 \sin x + \operatorname{tg} x \geq 3x.$$

(4) 求不定积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$

(5) 求定积分 $\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^n dx$ (n 自然数)

(6) 求积分 $\int_0^{\sqrt{2}} dy \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dx$

2. 在椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 上求一点, 使到直线 $3x + 4y = 12$ 的距离为最短. (10分)

3. 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$ 指出它的收敛范围, 讨论它的一致收敛性, 并求和. (10分)

4. 设 L 是单位圆周 $x^2 + y^2 = 1$, 方向为逆时针. 求积分 $\int_L \frac{(x-y)dx + (x+4y)dy}{x^2 + 4y^2}$. (10分)

5. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < z < 1\}$, $S = \partial V$. 求积分 $\iint_S yz \, dz \, dx + (x^2 + y^2)z \, dx \, dy$, 积分沿外法线方向. (10分)

6. 计算

$$I(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin^2 x + \alpha^2 \cos^2 x) \, dx,$$

$\alpha \in (0, +\infty)$. 要求说明计算方法的合理性. (12分)