1999 年复旦大学数学物理方程试题

1999 年复旦大学数学物理方程试题

（共 3 页）

一.(1) 将方程 $u_{xx}+2u_{xy}=0$

化成标准型 （7分）

(2) 求解定解问题

$$\begin{cases} u_{xx}+2u_{xy}=0, \\ y=0: \quad u=x, \\ y=2x: \quad u=3x^2 \end{cases}$$

（8分）.

二. 求下述问题的形式解

$$\begin{cases} v_t=v_{xx}+\cos(2x)+1 \\ v|_{t=0}=0, \\ v_x|_{x=0}=v_x|_{x=\pi}=0. \end{cases}$$

（15 分）

三. 设 u 是定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f, & \Omega \text{内} \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = g \end{cases}$$

的古典解，其中 Ω 为有界区域，Γ 为其边界，$\vec{n}$ 为外法向，f, g 为已知函数，且 $f>0$，$g>0$，c 为正常数。求证在 $\bar{\Omega}$ 上必有 $u \geq 0$。 (20分)

四.(1) 写出下列热传导方程初边值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & 0<x<\pi,\ t>0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

的解的表达式，其中 $\varphi(x)$ 为光滑函数，$\varphi(0)=\varphi(\pi)=0$。 (5分)

(2) 证明当 $t \to +\infty$ 时，上述问题的解 u 关于 x 一致地收敛于零。

(10分)

五. 证明双曲型方程混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + a(x)u_x + b(x)u_t + c(x)u = f(x,t), \\ x=0: \quad u = \mu_1(t), \\ x=l: \quad (u_x + u) = \mu_2(t) \\ t=0: \quad u = \varphi(x), \quad u_t = \psi(x) \end{cases}$$

解的唯一性，其中 a, b, c 为 $[0, l]$ 上的连续函数 （20 分）

六. 设 B_r 是以原点为中心，以 r 为半径的圆域，u 在 B_r 中调和，且在 $\overline{B}_r$ 中一阶连续可微. 试证：

$$|u(0)| \le \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\pi}\iint_{B_r} u^2\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{2}}.$$

（15 分）