中国科学院长春光机所
2010年招收攻读博士学位研究生入学统一考试试卷
科目名称：数理统计

考生须知：

1. 本试卷满分为 100 分，闭卷，全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答卷纸上，写在本试卷纸或草稿纸上一律无效。

一、(20 **分**) 一串 0 、 1 数字（独立同分布）组成的序列中 1 的概率 p 代表了某种有用的信息，由于某种原因需要对其保密. 现对该串数字进行随机加密，对序列中的每一个数字抛一枚硬币 (每次正面出现的概率为 π). 若抛出的为正面，则原序列的数字不变；若抛出的为反面，则原序列中相应的数字由 x 变成 $1-x$ (即 0 变成 1 ， 1 变成 0). 加密后的序列可以公布，其中 1 的概率 p 可以估计出来. 若知道 π 的值，就可以从加密后的序列中的 1 的频率 p^* 计算出原序列的 p ，所以称 π 为“密钥”.

(1) 现已知 $p^*=0.55$ ，如果“密钥” $\pi=0.4$ ，试求 p ；

(2) 试说明为什么均匀硬币 $(\pi=0.5)$ 不适合用来加密.

二、**(20 分)** 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 从该总体中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\ldots,X_{2n}$ $(n\geq 2)$, 其样本均值为 $\overline{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$. 记

$$Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2.$$

求统计量 Y 的数学期望.

三、(20 **分**) 设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是抽自总体 X 的一组样本，已知 X 服从三点分布：

$$\mathrm{P}\,(X=-1)=p,\quad \mathrm{P}\,(X=0)=1-3p,\quad \mathrm{P}\,(X=1)=2p.$$

(1) 试分别用样本的一阶和二阶原点矩来估计未知参数 p;

(2) 证明这两个点估计都是无偏估计;

(3) 问这两个无偏估计，哪个更有效（即哪个方差最小）?

四、(20 **分**) 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是从具有概率密度函数

$$f(x,\theta)=\begin{cases} 2\left(\frac{\theta}{\pi}\right)^{1/2}\exp(-\theta x^2), & x>0, \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

的总体中抽出的一组样本. 用 C-R 不等式法证明 $\widehat{\theta}=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 是 $1/\theta$ 的最小方差无偏估计. (已知 $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$, 其中 $\Gamma(x)$ 为 Gamma 函数)

五、(20 **分**) 为考查 A,B 两种制鞋材料的耐磨性, 用它们制作了 10 双鞋, 其中每双鞋的两只鞋分别用 A 和 B 两种材料制作 (左、右脚两只鞋随机地采用 A 或 B). 10 个男孩试穿这 10 双鞋之后的磨损情况如下表所示 (数字代表磨损程度), 假定 A, B 两组数据的差服从正态分布, 问是否可以认为这两种材料的耐磨性无显著差异？ (检验水平 $\alpha=0.05$)

男孩	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	13.2	8.2	10.9	14.3	10.7	6.6	9.5	10.8	8.8	13.3
B	14.0	8.8	11.2	14.2	11.8	6.4	9.8	11.3	9.3	13.6

参考数值: $t_9(0.025)=2.2622$, $t_{10}(0.025)=2.2281$, $t_9(0.05)=1.8331$, $t_{10}(0.05)=1.8125$