沈阳工业大学

2009年硕士研究生招生考试题签

（请考生将题答在答题册上，答在题签上无效）

科目名称：数学分析

一、（40分）计算：

1、求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$。（8分）

2、求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$。（8分）

3、计算 $\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n-1)t}{\sin t}dt$，$n$是正整数。（8分）

4、设 $w=z^{y^x}$，求 $\frac{\partial w}{\partial x}$，$\frac{\partial w}{\partial y}$，$\frac{\partial w}{\partial z}$。（8分）

5、求 $\iint\limits_D 3\sqrt{x}dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le x\right\}$。（8分）

二、（10分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且对任意 $x\in[a,b]$，存在 $y\in[a,b]$，使得 $|f(y)|\le\frac{1}{2}|f(x)|$。证明存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=0$。

三、（12分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶连续导数，$f(0)=0$，定义 $F(x)=\begin{cases} f'(0), & x=0 \\ \frac{f(x)}{x}, & x\ne 0\end{cases}$，证明 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续导数。

四、（10分）设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二次可微，且 $|f(x)|\le 1$，$|f''(x)|\le 1$ 在 $[0,2]$ 上成立。证明对任意 $x\in[0,2]$，有 $|f'(x)|\le 2$。

五、（10分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调递增，求证 $\int_a^b xf(x)dx\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$。

六、（10分）证明 $f_n(x)=x^n e^{-n^2x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛。

七、（10分）设曲线积分 $\int_c xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 有连续导数，且 $\varphi(0)=0$，计算 $\int_{(0,0)}^{(2,2)}xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 的值。

考研论坛 bbs.kaoyan.com
download.kaoyan.com

八、 （12 分）试证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 在原点 $(0,0)$ 连续且偏导数存在，但在此点不可微。

九、 （12 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$ 的收敛域及和函数。

十、 （14 分）设 $z(x,y)$ 有二阶连续的偏导数，证明 $z(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 当且仅当存在二阶连续可微函数 $\varphi(t)$，$\psi(t)$，使得 $z(x,y)=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$。

十一、 （10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可导，且 $f(0)=0$，试求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_V f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dxdydz$，其中积分区域为 $V: x^2+y^2+z^2\le t^2$。

考研论坛 bbs.kaoyan.com

download.kaoyan.com