沈阳工业大学

2009年硕士研究生招生考试题签

（请考生将题答在答题册上，答在题签上无效）

科目名称：　线性代数与常微分方程　　　　**第 1 页 共 2 页**

一、（15分）计算阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1+x \end{vmatrix}$$

二、（15分）证明：若 $A\in R^{m\times n}$， $rank(A)=r,r<n$，则方程组 $Ax=0$ 的解是 R 上的一个 $n-r$ 维线性空间。

三、（15分）证明：任何一个正定阵可以表示为一个非奇异阵乘以自己的转置。

四、（15 分）证明：对于 n 阶实方阵 A，若它有 n 个线性无关的特征向量，则它相似于一个对角阵。

五、（20分）在 n 维线性空间中，设有线性变换A和向量 ξ，使 $A\xi^{n-1}\neq 0$，求证A在某组基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

六、（15分）已知 $\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}$ 为方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt}=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2 \end{cases}$$

基本解，试求 $a_{ij}(t),i,j=1,2$。

038

七、（20分）若有P，使$P^{-1}AP$为对角阵，试求e^{At}。

八、（20分）证明：若A的特征值均是负实部且可对角化，则存在$C,\alpha>0$使$\left|e^{At}\right|\le Ce^{-\alpha t}$。

九、（15分）考虑方程组$\frac{dx}{dt}=f(x)$，其中$x=(x_1\cdots x_n)^T,f=(f_1(x)\cdots f_n(x))^T,f(0)=0,f(x)$在整个空间连续，若$\sum_{i=1}^{n}f_i(x)x_i<0$，则零解$x=0$是全局渐进稳定的。