

2011 年硕士研究生招生考试题签

(请考生将题答在答题册上, 答在题签上无效)

科目名称: 数学分析

第 1 页 共 2 页

一、(每小题 5 分, 共计 30 分) 计算下列各题

1. (5 分) 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$;

2. (5 分) 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right)$;

3. (5 分) 求曲线 $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t - t^2 \end{cases}$ 在 $t = 1$ 处的切线及法线方程;

4. (5 分) 设 $u = f(x + y, xy)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$;

5. (5 分) 设 $F(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy} dy$, 求 $F'(x)$;

6. (5 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n}$ 的收敛半径及收敛域。

二、(15 分) 证明: 当 $x > 0$ 时, 有下面的不等式成立:

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}$$

三、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 其中 $0 < a < b$, 证明至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi)$$

四、(15 分) 证明反常积分 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ 当 $0 < p < 1$ 时收敛, 并求其值; 当 $p \geq 1$ 时发散。

五、(15 分) 验证方程 $F(x, y) = y - x - \frac{1}{2} \sin y = 0$ 在原点 $(0, 0)$ 附近能确定一个连续可导的隐函数 $y = f(x)$, 并求 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 。

六、(15 分) 求函数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $x + y - 1 = 0$ 下的极值。

七、(15 分) 计算 $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$, 其中 D 由 $x=0, y=0, x+y=1$ 所围区域。

八、(10 分) 计算曲面积分 $\iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$, 其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$ 的外侧。

九、(15 分) 验证曲线积分 $\int_{(0,0)}^{(x,y)} (2x \cos y - y^2 \sin x) dx + (2y \cos x - x^2 \sin y) dy$ 与路线无关, 并求其值。

十、(10 分) 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛。