辽宁大学 2005 年

攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：数学分析

一、计算下列极限（每小题 8 分，共 24 分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1-x\sin\dfrac{1}{x}\right)$　2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(3x+e^x\right)^{\frac{3}{x}}$　3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^n+3^n+4^n}{3}\right)^{\frac{1}{n}}$

二、设 $\begin{cases} x=t^3+3 \\ y=3^t+3 \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$（10 分）

三、设 $f(x)=\int_1^x \dfrac{\sin t}{t}dt$，计算积分 $\int_0^1 xf(x)dx$.（12 分）

四、求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ 的收敛域及和函数（12 分）

五、设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $z+e^z-xy=0$ 确定的隐函数，求 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$（10 分）

六、设 $f(x,y,z)=\ln(xyz^2)$ 求 $f(x,y,z)$ 在第一挂限的球面 $x^2+y^2+z^2=5r^2$ 上的最大值.（10 分）

七、计算下列积分（每小题 8 分，共 32 分）

（1）　求 $\int_0^1 dx\int_x^1 e^{y^2}dy$（8 分）

（2）　求三重积分 $\iiint\limits_v (x+y+z)^2 dxdydz$，其中 v 是区域 $x^2+y^2+z^2\le 1$；（8 分）

（3）　求 $\oint\limits_L (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$，其中 L 是平面 $x+y+z=1$ 与柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线，从 z 轴正向看去，L 为逆时针方向.（8 分）

（4）　求 $\iint\limits_\Sigma yzdzdx+2dxdy$，其中 Σ 是球面 $z^2+x^2+y^2=4$ 的外侧在部分.（8 分）

八、设 $I(r)=\oint\limits_{C_r}\dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$ 其中 C_r 是圆周 $(x-1)^2+y^2=r^2$，取逆时针方向，求 $I(r)\,(r\ne 1)$.（10 分）

九、证明下列各题（每小题 10 分，共 30 分）

（1）.设 $f(x,y)$ 具有二阶连续导数，且 $f(x,y)\ne 0$，

a.若$f(x,y)$满足方程$f(x,y)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}$.........$\otimes$

证明：$\dfrac{1}{f(x,y)}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\Phi(x)$

b.证明：$f(x,y)=g(x)h(x)$的充分必要条件是$f(x,y)$满足方程$\otimes$

（2）.设$f(x)$在$[a,b]$可导，且$a<f(x)<b,\ f'(x)\neq 1$

证明:设$f(x)$于(a,b)存在唯一不动点，即方程$f(x)=x$于(a,b)存在唯一实数根.

（3）证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2\cos nx}{x^4+n^4}$在$(-\infty，\infty)$一致收敛.