

## 大连理工大学二〇〇一年硕士生入学考试

## 《数学物理方法》 试题

共 1 页

注: 答题必须注明题号答在答题纸上, 否则试卷作废!

一、(20 分)

1. 计算下列复数的值:

(1)  $\sqrt{1-i}$ ; (2)  $i^i$

2. 对于一个数学物理方程, 它的边界条件有哪几种类型? 请写出相应的表示式, 并说明其物理意义。

3. 请简述单连通区域中的柯西定理。

4. 请写出如下本征方程的本征值和本征函数:  $X''(x) + \lambda X(x) = 0, X(0) = 0, X'(x) = 0$ 5. 填空 (1)  $P_{-l}(x) = \underline{\hspace{2cm}} P_l(x)$ ; (2)  $J_0 = \underline{\hspace{2cm}}$ 

二、利用柯西积分公式完成如下积分 (10 分)

1.  $\oint_c \frac{\cos(\pi z/4)}{z^2 - 1} dz \quad (c: |z-1| = \frac{1}{2})$  2.  $\oint_c \frac{e^z}{(z^2 + a^2)^2} dz \quad (c: |z| = 2a, a > 0)$

三、利用留数定理计算如下积分 (10 分)

1.  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \sin \theta} \quad (|\varepsilon| < 1)$  2.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(mx)}{(x^2 + a^2)^2} dx \quad (m > 0, a > 0)$

四、(10 分)

1. 将函数  $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$  在  $[-\infty, \infty]$  区间内展开成傅立叶积分 ( $a > 0$ )。2. 求函数  $f(t) = t \sin at$  的拉普拉斯变换式  $F(p)$ 。 ( $t > 0$ )

五、用分离变量法求解如下方程 (20 分)

$$u_{xx} - a^2 u_{tt} = 0 \quad (t > 0, 0 < x < l)$$

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0 \quad (t > 0) \quad \text{其中 } a, u_0, u_1 \text{ 为常数。}$$

$$u(x, 0) = u_0 \sin(2x\pi/l); u_t(x, 0) = u_1(1 - x/l) \quad (0 \leq x \leq l)$$

六、有一半径为  $a$  的导体球壳, 已知球面上的电势分布为  $u(a, \vartheta) = u_0 \cos^2 \vartheta$ , 请用球谐函数展开的方法求球壳内任意一点的电势分布 (15 分)。七、请根据贝塞尔函数的母函数公式  $e^{x(t-t^{-1})/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$  证明如下公式成立 (15 分):

$$\cos x = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x)$$

$$\sin x = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(x)$$