大连理工大学二〇〇二年硕士生入学考试

《数学物理方法》　试题　　　共　　页

注：答题必须注明题号答在答题纸上，否则试卷作废！

一、基本题（30分）

1．已知一解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的实部为 $u(x,y)=e^{-y}\cos x$，试求其导数。

2．简述泰勒展开与洛朗展开的区别，并分别写出这两种展开的表示式。

3．简述确定一个数学物理方程的边界条件有哪几类，并写出相应的表示式。

4．简述连带勒让德方程是由什么方程在什么坐标系下推导出来的？并指出连带勒让德方程的本征值和本征函数。

5．以第一类边界条件为例，简述用格林函数方法求解有界区域中泊松方程的基本步骤。

二、请用留数定理计算如下积分（10分）

1．$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\cos^2\theta}$

2．$\int_0^{\infty}\frac{\cos(mx)}{a^2+x^2}dx\quad(m>0,a>0)$

三、（10分）

1．将函数 $f(x)=e^{-\eta|x|}$ 在 $[-\infty,\infty]$ 区间内展开成傅立叶积分（$\eta>0$）。

2．利用拉普拉斯变换公式，求像函数 $F(p)=\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$ 的原函数 $f(t)$。

四、利用傅立叶级数展开法求如下方程的解（20分）

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega t\quad(t>0,0<x<l)$$

$$u_x(0,t)=0,u_x(l,t)=0\quad(t>0)$$

$$u(x,0)=0,u_t(x,0)=0\quad(0<x<l)$$

其中 A 和 ω 均为常数。

五、（15分）根据勒让德函数的母函数公式 $(1-2xt+t^2)^{-1/2}=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)t^l\quad(t\le 1)$

证明有下公式成立：$\int_{-1}^{1}P_l^2(x)dx=\dfrac{2}{2l+1}$

六、有一半径为 a 的无穷长圆柱，初始温度为常数 u_0，表面温度维持为零，求柱体内温度的变换。设圆柱的温度传导率为 κ