试题编号：406　　　　考试日期：1月19日下午

大连理工大学二〇〇三 年硕士生入学考试

《　高等代数　》试题

注：试题必须注明题号答在答题纸上，否则试卷作废！

一、填空（每小题 4 分）

1. 当 p, q 满足______关系时，多项式 x^3+px+q 有重根。

2. n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} =$ ________.

3. 设 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$，则 D 的第四行元素的余子式之和

为______.

4. 设 n 维向量组 $\alpha_i=(1,t_i,t_i^2,t_i^3\dots,t_i^{n-1})$　i=1,2,…,n，则 $\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n$ 线性无关的充要条件为____________（用 t_i 的关系说明）。

5. 已知 n 阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4),\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为 4 维列向量，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，如果 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，则线性方程组 $AX=\beta$ 的通解为__________.

6. 设 A 为 3 阶矩阵，E 为 3 阶单位阵，且 $|E-A|=0$，$|2E-A|=0$

$|3E-A|=0$，$|4E-A|=$ ______ .

7. 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 经正交变换 $X = PY$ 可化成标准形 $f = 6y_1^2$，则 $a =$ __

8. 在实函数空间中，1，$\cos^2 x$，$\cos 2x$ 是线性______ .

9. 设三维线性空间 V 上的线性变换 $\mathbf{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

写出 $\mathbf{A}$ 在基 $\varepsilon_2, \varepsilon_1, \varepsilon_3$ 下的矩阵__________ .

10. 设 A 为 3 阶矩阵，且 $A^2=0$，则 A 的伴随矩阵 A^* 的秩 $r(A^*)=$______.

二、(20 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

问 (1) t 为何值时，A 是正定阵？

(2) t 为何值时，存在可逆阵 P，Q，使 $PAQ = B$？

(3) t 为何值时，存在可逆阵 W，使 $W^{-1}AW = C$？

(4) t 为何值时，存在可逆阵 R，使 $R^TAR = D$？

三、(14分)设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}$

(1)证明全体与 A 可换的矩阵构成实数域上的线性空间，记作 C(A).

(2)求 C(A)的维数与一组基。

四、(12分)证明:次数 > 0 且首项系数为 1 的多项式 f(x) 是某一不可约多项式的方幂的充分必要条件是，对任意的多项式 g(x), h(x)，由 $f(x)|g(x)h(x)$ 可以推出 $f(x)|g(x)$，或者对某一正整数 m, $f(x)|h^m(x)$.

五、(20分)(1)设向量组(Ⅰ): $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ 与向量组(Ⅱ): $\{\beta_1,\ldots,\beta_s\}$ 的秩相等，(Ⅱ)可由(Ⅰ)线性表示。证明(Ⅰ)与(Ⅱ)等价。

(2)设 A 是 m×n 矩阵，B 是矩阵，且 r(A)=r(AB)，试证明存在 s×n 矩阵 C，使 A=ABC。

六、(20分)设 V 是复数域上的 n 维空间，而线性变换 **A** 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ 下矩阵是一若当块。证明:

(1) V 中包含 ε_1 的 **A**-子空间只有 V 自身.

(2) V 中任一非零 **A**-子空间都包含 ε_n.

七、(24分) 设V是一个n维欧氏空间，$\mathbf{A}$是正交变换，在V的标准正交基底上的矩阵是A。证明:

(1) 若u+vi是A的一个虚特征值，则有 $\alpha,\beta\in V$，使

$$\mathbf{A}\,\alpha=u\alpha+v\beta\ ,\quad \mathbf{A}\beta=-v\alpha+u\beta\ ;$$

(2) 若A的特征值皆为实数，则V可分解为一些两两正交的一维不变子空间的直和;

(3) 若A的特征值皆为实数，则A是对称阵。