大 连 理 工 大 学

二〇〇五年攻读硕士研究生入学考试试题

考试科目：高等代数（404）

一、填空题（每小题 4 分）

1、设 $f(x)$ 是有理数域上的不可约多项式，α 为 $f(x)$ 在复数域内的一个根，则 α 的重数为__________.

2、n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}2 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 3 & \cdots & 1 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & n+1\end{vmatrix}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

3、设 α 、β 均为 n 维列向量：$\alpha'\beta=2$，则 $A=E+\alpha\beta'$ 可逆，$A^{-1}=$__________.

4、设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，

$$\begin{cases}\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_r\\ \beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_r\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \beta_r=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{r-1}\\ \beta_{r+1}=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r\end{cases},$$

则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r,\beta_{r+1}$ 线性__________.

5、设 A 是 n 阶矩阵，秩 $A=r$，非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 有解，则 $Ax=\beta$ 的解向量组的秩为__________.

6、设 a 、b 均为实数，二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(ax_1+bx_2)^2+(ax_2+bx_3)^2+\cdots+(ax_{n-1}+bx_n)^2+(ax_n+bx_1)^2$$

a 、b 满足__________条件时，f 为正定二次型.

7、设 V 是由矩阵 A 的全体实系数多项式组成的线性空间，其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \omega & 0\\ 0 & 0 & \omega^2\end{pmatrix}，其中\ \omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},$$

则 V 的一组基是__________.

8、设 V 是数域 P 上的一维的线性空间，写出 V 上的所有线性变换__________.

9、正交矩阵的实特征值为__________.

10、设 G 为群，H 、N 分别是 G 的子群，H 、N 的阶分别是 m 、n，且 m 、n 互

素，令$\alpha \in H \bigcap N$，则元素α的阶为__________.

二、(**10分**)设$f(x)$、$g(x)$是数域P上的多项式，证明：在数域P中，若$f^3(x) \mid g^3(x)$，则$f(x) \mid g(x)$.

三、(**15分**)设A为n级矩阵，且秩$A=$秩A^2，证明对任意自然数k，有秩$A^k=$秩A.

四、(15分)证明：一个实二次型可以分解成两个实系数的一次齐次多项式的乘积的充分必要条件是，它的秩等于2和符号差等于0，或者秩等于1.

五、(**15分**)设$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$是数域$P$上的$n$维线性空间$V$的一组基，$W$是$V$的非平凡子空间，$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$是$W$的一组基，证明：在$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$中可以找到$n-r$个向量$\varepsilon_{i_1},\cdots,\varepsilon_{i_{n-r}}$，使$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\varepsilon_{i_1},\cdots,\varepsilon_{i_{n-r}}$为$V$的一组基.

六、(**10分**)设3阶矩阵A满足$A^2-3A+2E=0$，写出A的若当（Jordan）标准型的所有可能形式.

七、(**10分**)设V是一个n维欧氏空间，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是V的一个标准正交基，$\mathbb{A}$是V的一个线性表换，$A=(a_{ij})_{n\times n}$是$\mathbb{A}$关于这个基的矩阵，证明：$\alpha_{ji}=(\mathbb{A}(\alpha_i),\alpha_j)$，$i,j=1,2,\cdots,n$.（其中$(,)$表示内积）

八、(**25 分**)设$\mathbb{A}$是数域P上的n维线性空间V的一个线性变换，$f(x)$是$\mathbb{A}$的最小多项式，在$P[x]$中，$f(x)=f_1(x)f_2(x)$，$f_1(x)$、$f_2(x)$均为首项系数为1的多项式，且$f_1(x)$与$f_2(x)$互素，令

$$V_1=\left\{\alpha \in V \mid f_1(\mathbb{A})(\alpha)=0\right\}$$

$$V_2=\left\{\alpha \in V \mid f_2(\mathbb{A})(\alpha)=0\right\}$$

证明：

(**1**)(**5分**)V_1和V_2都是$\mathbb{A}$的不变子空间；

(**2**)(**10分**)$V=V_1 \oplus V_2$；

(**3**)(**10分**)$\mathbb{A}|_{V_1}$的最小多项式是$f_1(x)$，$\mathbb{A}|_{V_2}$的最小多项式是$f_2(x)$.

九、(**10 分**)设R是有1的交换环，P是R的素理想，$I_1,I_2,\cdots,I_n$是R的极大理想，如果P包含$I_1,I_2,\cdots,I_n$的交集，证明P必为极大理想.