

大连理工大学二〇〇五年硕士生入学考试

第 1 页

《 数学物理方法 》 试题

共 2 页

注: 答题必须注明题号答在答题纸上, 否则试卷作废!

一、(50 分) 简答题

1. 写出并证明直角坐标系下的柯西黎曼条件。
2. 写出柯西积分公式的导数形式, 并由此证明解析函数的无限次可微性。
3. 单值函数的孤立奇点有哪几类? 举例说明。
4. 请说明在数学物理方法中学过哪些正交、完备的基族, 并说明展开范围。
5. 什么是 δ 函数? 为何引入? 写出 δ 函数的选择性并证明。
6. 在数学物理方法的学习中, 有哪些自然边界条件和衔接条件?
7. 简述用分离变量法求解一维有界非齐次数学物理方程在齐次边界条件下的解的基本过程。
8. 连带勒让德方程是什么方程在怎样求解过程中获得的? 并写出该方程的通解。
9. 写出亥姆霍兹方程 $\Delta v + k^2 v = 0$ 在柱坐标系下的表示式 (Δ 是拉普拉斯算子), 说明在柱侧和上下底都是齐次边界条件下恒有 $k^2 \geq 0$ 。
10. 简述用格林函数方法求解有源、有界泊松方程的基本过程

二、(20 分) 将下列各式进行洛朗展开。

1. $\frac{1}{z^2 - 3z + 2}$, $1 < |z| < 2$
2. $\frac{1}{z^2(z-1)}$, $0 < |z-1| < 1$

三、(20 分) 试用分离变量法 (付里叶级数法) 求解下列定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & (0 < x < 1, t > 0) \\ u(0, t) = 0, & u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin 2\pi x, & u_t(x, 0) = x(1-x). \end{cases}$$

四、(20 分) 写出贝塞尔函数的母函数公式, 并证明贝塞尔函数的积分表示式

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta$$

五、(20 分) 在半径为 r_0 的球形区域的外部求解下列定解问题, 其中 Δ 是拉普拉斯算子。

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (r > r_0) \\ \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = u_0 (\sin^2 \theta \sin^2 \varphi - \frac{1}{3}) \\ u|_{r \rightarrow \infty} = \text{有限值} \end{cases}$$

六、(20 分) 利用傅里叶积分变换法, 求解下列方程的定解问题。

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & (0 < x < \infty) \\ u(0, t) = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$