2005年太原科技大学研究生入学考试

数学分析试题

（可以不抄题，但必须答在答题纸上）

一、填空题（每小题3分，共21分）

1、$\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x]=$______

2、$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[x]}{x}=$______

3、$\sum\limits_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin x|dx=$______

4、直线 $y=x, 0\le x\le\pi$，绕x轴旋转一周所得旋转曲面的面积等于______

5、$\int\dfrac{\ln\sin x}{\sin^2 x}dx=$______

6、设 $f(x)$ 是周期为2的周期函数，它在 $(-1,1]$ 上的定义为 $f(x)=\begin{cases}2, -1<x\le 0\\ x^3, 0<x\le 1\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的傅立叶级数在x=1处收敛于______

7、$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=$______

二、计算题（每小题12分，共48分）

1、计算：$\oint_L(2y+z)dx+(x-z)dy+(y-x)dz$，其中L为平面 $x+y+z=1$ 与各坐标平面的交线，取逆时针方向为正向。

2、设 Σ 为 $z=x^2+y^2$ 在第一卦限中位于 $0\le z\le 1$ 部分的上侧。求向量 $A=(x,y,z)$ 穿过Σ，流向指定侧的流量Φ。

3、设f（t）连续，且f（0）=0。$\Omega: 0\le z\le h, x^2+y^2\le t^2 (t>0)$，又

$$F(t)=\iiint\limits_{\Omega}[z^2+f(x^2+y^2)]dv$$

计算 $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{F(t)}{t^2}$

4、设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}, x>0$，计算 $\int_{\ln 2}^{\ln 3} S(t)dt$

三、证明题（共 81 分）

1、（15 分）设 $f(x)$ 在[a,b]具有连续导数，且 $f(a)=f(b)=0$,

$\max\limits_{a\le x\le b}|f'(x)|=M$，试证明： $\int_a^b f(x)dx \le \frac{M}{4}(b-a)^2$

2、（20 分）（1）叙述极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 存在的柯西准则；

（2）根据柯西准则叙述 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 不存在的充要条件，并应用它证明 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin x$ 不存在。

3、（16 分）利用有限覆盖定理证明聚点定理。

4、（15 分）据理说明：在（0，1）近旁是否存在连续可微的函数 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$，满足

$f(0,1)=1, g(0,1)=-1$，且

$$[f(x,y)]^3+xg(x,y)-y=0，[g(x,y)]^3+yf(x,y)-x=0$$

并求 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial x}$

5、（15 分）利用公式 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，证明：

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-a^2x^2}-e^{-b^2x^2}}{x^2}dx=\sqrt{\pi}(b-a)$$

其中 $b>a>0$